

Слободянюк А.И.
«Очень длинные физические задачи»

Часть 1.
Задачи 1 – 9.

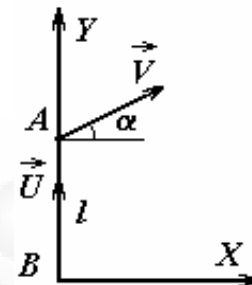
Содержание:

Задача 1. «Черепахи».....	3
Задача 2.	6
Задача 3. «Клюшка и шайба»	11
Задача 4. «Внутри конуса»	14
Задача 5. «Оборотный маятник»	24
Задача 6. «Упругая цепочка»	29
Задача 7. «Прямая и адиабата»	38
Задача 8. «Кристалл»	46
Задача 9. «Фазовые переходы».....	51

Задача 1. «Черепahi»

Когда одна черепаха догоняет другую, она движется так, что вектор ее скорости все время направлен на преследуемую черепаху. Во всех пунктах данной задачи размерами черепах можно пренебречь.

1. Черепаха А движется с постоянной скоростью v вдоль прямой составляющей угол α с осью x . Черепаха В, находящаяся в начале координат, решила догнать черепаху А, когда она пересекала ось Y на расстоянии l , и начала двигаться с постоянной по модулю скоростью u ($u > v$). Через какое время она догонит черепаху А?



2. Пусть скорость черепахи В $u = v$. Найдите расстояние между черепахами по прошествии достаточно большого промежутка времени.
3. n черепах находятся в вершинах правильного n -угольника со стороной l и начинают двигаться с постоянными по модулю скоростями u , так что вектор скорости первой все время направлен на вторую, второй на третью, ... n -ой на первую. Через какое время черепахи встретятся?

Рассмотрите отдельно случаи $n = 2$, $n = 4$ и дайте им простое объяснение. Как зависит время движения черепах до встречи от числа черепах при $n \rightarrow \infty$?

Решение.

1. Пусть в произвольный момент времени скорость черепахи В направлена под углом φ к оси X . В этот момент времени скорость сближения черепах (разность проекций скоростей на прямую, соединяющую их положения) определяется формулой

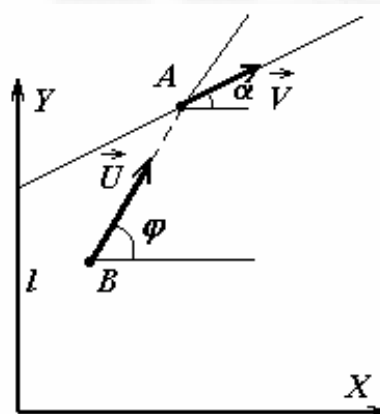
$$v_{сб.} = u - v \cos(\alpha - \varphi). \quad (1)$$

Разобьем время движения на небольшие временные интервалы Δt_i . В момент встречи черепах должны выполняться соотношения:

$$l = \sum (u - v \cos(\alpha - \varphi_i)) \Delta t_i, \quad (2)$$

(смысл которого - расстояние между черепахами изменилось от l до нуля); кроме того, в момент встречи координаты черепах равны:

$$(v \cos \alpha) t = \sum (u \cos \varphi_i) \Delta t_i, \quad (3)$$



$$(v \sin \alpha)t + l = \sum (u \sin \varphi_i) \Delta t_i. \quad (4)$$

Нам не известен закон, по которому изменяется угол φ , поэтому мы не можем вычислить суммы, стоящие в этих выражениях, но мы можем их выразить из равенств (3)-(4)

$$\sum (\cos \varphi_i) \Delta t_i = \frac{v \cos \alpha}{u} t;$$

$$\sum (\sin \varphi_i) \Delta t_i = \frac{v \sin \alpha}{u} t + l \frac{v}{u};$$

и подставить в преобразованное уравнение (2):

$$\begin{aligned} l &= \sum (u - v \cos(\alpha - \varphi_i)) \Delta t_i = ut - v \sum (\cos \alpha \cos \varphi_i + \sin \alpha \sin \varphi_i) \Delta t_i = \\ &= ut - v \cos \alpha \sum (\cos \varphi_i) \Delta t_i - v \sin \alpha \sum (\sin \varphi_i) \Delta t_i = \\ &= ut - v \cos \alpha \left(\frac{v}{u} t \cos \alpha \right) - v \sin \alpha \left(\frac{v}{u} t \sin \alpha + \frac{l}{u} \right) = \\ &= ut - \frac{v^2}{u} t - \frac{v}{u} l \sin \alpha; \end{aligned}$$

из которого находим

$$\boxed{t = l \frac{u + v \sin \alpha}{u^2 - v^2}}. \quad (5)$$

Заметим, что это решение имеет смысл, только при $u > v$, иначе вторая черепаха попросту не догонит первую. При $\alpha = \pm \pi / 2$ формула (5) приводит к тривиальным частным случаям $t = \frac{l}{u \mp v}$.

2. Если скорости черепах одинаковы, то прошествии некоторого времени они станут двигаться по одной прямой на неизменном расстоянии h друг от друга. Мы можем воспользоваться теми же рассуждениями, что и в решении первого пункта, соответствующим образом видоизменив уравнения (2)-(4)

$$l - h = \sum (u - v \cos(\alpha - \varphi_i)) \Delta t_i, \quad (6)$$

$$(v \cos \alpha)t - \sum (u \cos \varphi_i) \Delta t_i = h \cos \alpha, \quad (7)$$

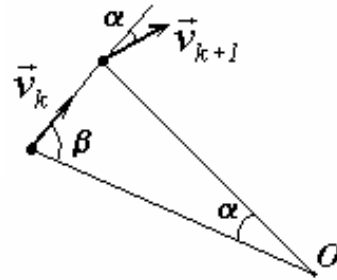
$$(v \sin \alpha)t + l - \sum (u \sin \varphi_i) \Delta t_i = h \sin \alpha. \quad (8)$$

Совместное решение этих уравнений по аналогичной п.1 методике приводит к результату

$$\boxed{h = l \frac{1 + \sin \alpha}{2}}, \quad (9)$$

частные случаи которого предлагаю рассмотреть самостоятельно.

3. Из соображений симметрии очевидно, что в любой момент времени черепахи будут находиться в вершинах правильного n -угольника, который постоянно поворачивается и сжимается. Однако в процессе движения углы между векторами скоростей черепах изменяться не будут. Легко найти угол между скоростями «соседних» черепах - он равен центральному углу α правильного n -угольника, причем $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Поэтому скорость сближения соседних черепах находится по формуле



$v_{сб.} = v(1 - \cos \frac{2\pi}{n}) = 2v \sin^2 \frac{\pi}{n}$. Тогда время движения черепах до встречи вычисляется по формуле

$$t = \frac{l}{v_{сб.}} = \frac{l}{2v \sin^2 \frac{\pi}{n}} \quad (10).$$

В случае $n = 2$, когда две черепахи ползут навстречу друг другу из (10) следует очевидный результат $t = \frac{l}{2v}$.

При $n = 4$, из формулы (10) следует, что $t = \frac{l}{v}$. В этом случае черепахи находятся в вершинах квадрата, их скорости взаимно перпендикулярны, поэтому скорость сближения равна скорости черепах, следовательно время сближения должно равняться $\frac{l}{v}$. При $n \rightarrow \infty$ угол α становится малым, а его синус стремится к самому углу, поэтому формула (10) дает в упрощенное выражение $t = \frac{l}{2\pi^2 v} n^2$, которое также легко интерпретируется - время достижения согласия в группе из n человек пропорционально n^2 .

Другой способ решения последней задачи заключается в определении скорости приближения черепах к центру многоугольника и начального расстояния до центра.

Заметим, что траектории черепах представляют собой спирали с бесконечным числом витков, длина которых, тем не менее, конечна.

Комментарии к задаче. Эта задача, конечно является нетипичной для кинематики, для ее решения требуются использовать не совсем тривиальный метод. Фактически этот метод основан на четком понимании физического смысла возможных проекций вектора скорости (скорость сближения, скорость приближения к центру и т.д.) При решении некоторых кинематических задач необходимо разложить «движение на составляющие». Так, например, в последнем пункте движение каждой черепахи можно представить как приближение к центру и вращение вокруг него. Иногда движение твердого тела удобно рассматривать как сумму поступательного движения и вращения, или как вращение вокруг мгновенной оси.

Задача 2.

Через два блока, подвешенных на одной высоте, переброшена длинная нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два одинаковых груза. К середине нити прикрепляют еще один такой же груз (рис.1) и отпускаю его без начальной скорости. Расстояние между осями блоков равно l . Тернием и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

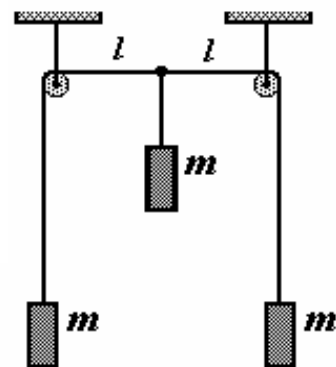


Рис.1

1. Определите максимальное смещение центрального груза в процессе движения.
2. В каком положении грузы могут находиться в состоянии равновесия?
3. Чему равны скорость и ускорение центрального груза, когда он проходит положение равновесия?
4. Грузы находятся в положении равновесия. Затем центральный груз смещают вниз на малое расстояние от этого положения. Определите период малых колебаний системы.

Воспользуйтесь приближенной формулой справедливой при малых значениях x и любых показателях степени α

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$$

Решение.

1. Обозначим смещение центрального груза x_0 , а смещения боковых грузов x_1 (рис.2). Эти величины связаны соотношением

$$x_1 = \sqrt{l^2 + x_0^2} - l. \quad (1)$$

Вычисляя производные по времени от обеих частей равенства (1), получим связь между скоростями грузов

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dx_0} \cdot \frac{dx_0}{dt} = \frac{x_0}{\sqrt{l^2 + x_0^2}} v_0, \quad (2)$$

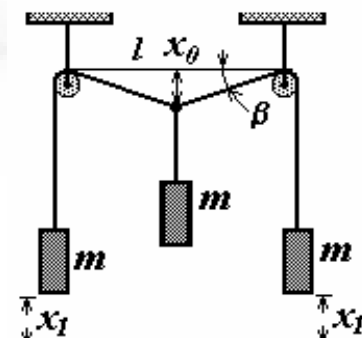


Рис.2

где v_0, v_1 - скорости центрального и боковых грузов, соответственно. При выводе формулы (2) использовано правило вычисления производной от

сложной функции. Понятно, что производная от координаты по времени является, скоростью.

Запишем теперь выражение для изменения потенциальной энергии системы

$$\Delta U = -mgx_0 + 2mgx_l = -mgx_0 + 2mg(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l). \quad (3)$$

Выражение для кинетической энергии системы имеет вид

$$E_k = \frac{mv_0^2}{2} + 2\frac{mv_l^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \left(1 + 2 \frac{x_0^2}{l^2 + x_0^2} \right) = \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2}. \quad (4)$$

Используя закон сохранения механической энергии, можно записать уравнение

$$\frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2} = mgx_0 - 2mg(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l). \quad (5)$$

При максимальном смещении скорость груза обращается в нуль, поэтому уравнение для определения максимального смещения имеет вид

$$mgx_0 - 2mg(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l) = 0. \quad (6)$$

Решая это уравнение, получим максимальное смещение груза

$$x_{0,max} = \frac{4}{3}l. \quad (7)$$

Отметим, что максимальное смещение груза можно было найти непосредственно из уравнения (3), полагая $\Delta U = 0$. Тем не менее, мы записали уравнение закона сохранения энергии (5), так как, во-первых, оно показывает, что скорости всех грузов одновременно обращаются в нуль, во-вторых это уравнение понадобится в дальнейшем.

2. Положение равновесия любой механической системы соответствует минимуму потенциальной энергии. Вычислим производную от функции (3) и приравняем ее нулю

$$\frac{dU}{dx_0} = -mg + 2mg \frac{x_0}{\sqrt{l^2 + x_0^2}} = 0. \quad (8)$$

Решение этого уравнения находится элементарно

$$\bar{x}_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad (9)$$

где мы обозначили $\bar{x}_0$ - положение равновесия грузов.

Полученные результат почти очевиден - при этом значении все три нити образуют между собой равные углы, натяжения нитей равны mg , поэтому система находится в равновесии.

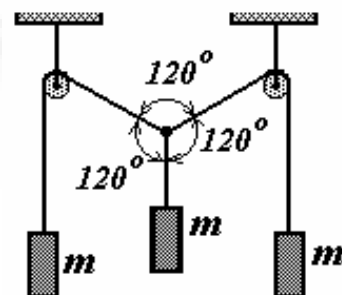


Рис.3

3. Скорость центрального груза выразим из уравнения (5)

$$v_0 = \sqrt{2g\left(x_0 - 2\sqrt{x_0^2 + l^2} + 2l\right) \frac{x_0^2 + l^2}{3x_0^2 + l^2}}. \quad (10)$$

Подстановка равновесного значения (9) приводит к следующему результату

$$\bar{v}_0 = \sqrt{\frac{4}{3}gl(2 - \sqrt{3})}. \quad (11)$$

Ускорение груза можно вычислить как производную от функции (10), но для незначительного упрощения алгебраических выкладок, мы вычислим производные от обеих частей уравнения (5)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(mgx_0 - 2mg\left(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l\right)\right). \quad (12)$$

В точке равновесия правая часть этого уравнения обращается в нуль (именно из этого условия мы находили положение равновесия). Аккуратно вычислим производную левой части и приравняем ее к нулю

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2}\right) &= \frac{2mv_0a_0}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2} + \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{6x_0(l^2 + x_0^2) - 2x_0(l^2 + 3x_0^2)}{(l^2 + x_0^2)^2} = \\ &= mv_0a_0 \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2} + \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{4x_0l^2}{(l^2 + x_0^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Подставляя равновесное значение (9) и найденное значение скорости (11), находим значение ускорения

$$\bar{a}_0 = -g \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}. \quad (13)$$

4. Для вычисления периода малых колебаний воспользуемся традиционной методикой, основанной на законе сохранения энергии. Если некоторая величина x является малым смещением из положения равновесия, то закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E, \quad (14)$$

где $v = \frac{dx}{dt}$ - скорость изменения величины x , E - полная энергия системы,

$\frac{kx^2}{2}$ - приближенное выражение для потенциальной энергии (в самом общем случае, если x является малым смещением от положения равновесия, потенциальную энергию можно представить в таком виде). Если получено уравнение типа (14), то его решением будут гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (15)$$

и амплитудой, которая определяется энергией системы.

Таким образом нам необходимо представить уравнение закона сохранения энергии (5) в виде (14). Для этого координату центрального груза представим в виде

$$x_0 = \bar{x}_0 + \delta, \quad (16)$$

где $\bar{x}_0$ - положение равновесия, определяемое формулой (9), δ - смещение от этого положения, которое мы будем полагать малым. Теперь нам необходимо выразить кинетическую и потенциальную энергию системы через величину δ , а затем провести разложение этих функций по малому параметру δ до второго порядка. То есть пренебречь слагаемыми, которые имеют порядок δ^3 и выше.

В выражение для кинетической энергии входит квадрат скорости (которая сама является величиной второго порядка малости), поэтому вместо переменной величины x_0 следует сразу подставить ее равновесное значение $\bar{x}_0$

$$E_k = \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2} \approx \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{l^2 + 3\bar{x}_0^2}{l^2 + \bar{x}_0^2} = \frac{3}{2}m \cdot \frac{v_0^2}{2}. \quad (17)$$

Преобразование выражения для потенциальной энергии несколько сложнее и требует определенных навыков, поэтому проведем эти преобразования достаточно подробно с некоторыми комментариями. Исходное выражение имеет вид (в котором мы опускаем постоянное слагаемое, не влияющее на поведение системы)

$$U = -mgx_0 + 2mg\sqrt{l^2 + x_0^2} = mg(-x_0 + 2\sqrt{l^2 + x_0^2}).$$

Далее подставим выражение (16) и преобразуем выражение, стоящее в скобках

$-x_0 + 2\sqrt{l^2 + x_0^2} = -(\bar{x}_0 + \delta) + 2\sqrt{l^2 + (\bar{x}_0 + \delta)^2}$	раскрываем скобки;
$-(\bar{x}_0 + \delta) + 2\sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2} + 2\bar{x}_0\delta + \delta^2$	оставляем квадратичные слагаемые;
$-\delta + 2\sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2\bar{x}_0\delta + \delta^2}{l^2 + \bar{x}_0^2}}$	опускаем постоянное слагаемое, под корнем выделяем малое слагаемое;
$-\delta + 2\sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2\bar{x}_0\delta + \delta^2}{l^2 + \bar{x}_0^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{2\bar{x}_0\delta + \delta^2}{l^2 + \bar{x}_0^2}\right)^2\right)$	в последнем члене пренебрегаем слагаемым δ^2 , перегруппировываем, очередной раз опускаем постоянный член;
$-\delta + \frac{2\bar{x}_0^2}{\sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2}}\delta + \delta^2 \left(\frac{1}{\sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2}} - \frac{1}{8} \sqrt{l^2 + \bar{x}_0^2} \left(\frac{2\bar{x}_0^2}{l^2 + \bar{x}_0^2} \right)^2 \right)$	подставляем значение для $\bar{x}_0$ приводим подобные члены, убеждаемся в исчезновении линейного по δ слагаемого;

$$\frac{3\sqrt{3}}{8l}\delta^2$$

получаем окончательный результат.

Итак, приближенное выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$U = \frac{3\sqrt{3}}{4l}mg\frac{\delta^2}{2}, \quad (18)$$

а уравнение закона сохранения энергии преобразовывается к виду

$$\frac{3}{2}m\frac{v^2}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4l}mg\frac{\delta^2}{2} = E. \quad (19)$$

Используя формулу (15), получаем требуемый результат

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{\sqrt{3}g}}. \quad (20)$$

Комментарии к задаче. Самое поразительное в полученном результате, то что в точке равновесия ускорение отлично от нуля! Это значит, что скорость центрального груза в этой точке не достигает максимального значения (как это обычно бывает). Дело в том, что в нашем случае движутся три груза, причем связь между скоростями включает зависит от координат тел. Конечно, в точке равновесия (при минимальной потенциальной энергии) суммарная кинетическая энергия системы максимальна, однако из этого не следует, что скорость центрального тела максимальна именно в этой точке.

На рис.4 представлены графики зависимостей скоростей тел v_0, v_1 и потенциальной энергии U от угла β , который образует нить с горизонтом (см.рис.2). Видно, что скорость центрального тела достигает максимума выше положения равновесия, а скорости боковых грузов максимальны ниже этой точки.

Формально уравнения закона сохранения энергии (5) можно представить как уравнение движения тела с переменной эффективной массой

$$m^* = m \cdot \frac{l^2 + 3x_0^2}{l^2 + x_0^2}, \quad \text{которая}$$

изменяется от m (при $x_0 = 0$)

движется только центральный груз, скорость боковых равна нулю при любой скорости центрального) до $3m$ (при $x_0 \gg l$ когда скорости всех грузов становятся равными).

Рекомендую более внимательно разобраться с процессами, проходящими в рассматриваемой системе, для чего предлагаю решить эту задачу на основании уравнений второго закона Ньютона.

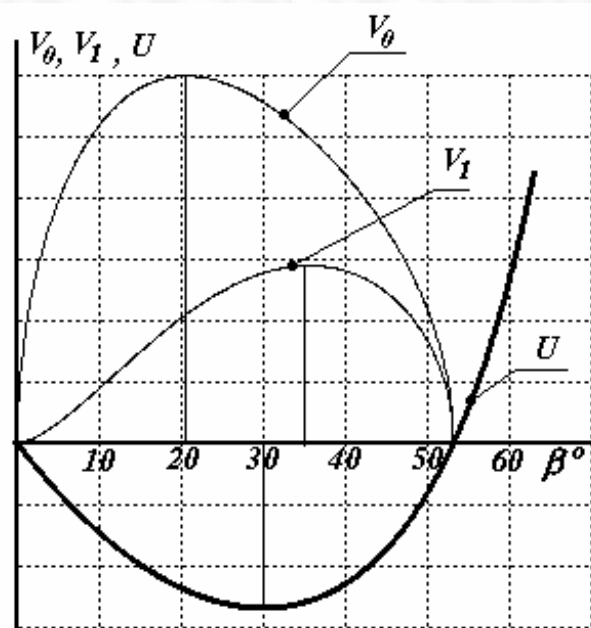
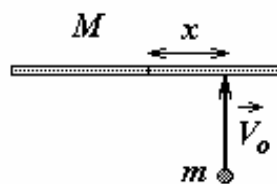


Рис.4

Задача 3. «Клюшка и шайба»

На гладком горизонтальном льду лежит однородный стержень длины l и массы M . На стержень налетает со скоростью $\vec{v}_0$, направленной перпендикулярно стержню, небольшая шайба массы m . Точка удара находится на расстоянии x от центра стержня. Удар абсолютно упругий.



1. Найдите: скорость шайбы v_l , скорость центра стержня u , угловую скорость вращения стержня ω после первого удара. Ответы выразите через параметры $\mu = M/m$ и $\xi = x/l$.
2. При каком соотношении между параметрами μ и ξ шайба столкнется со стержнем только один раз? Изобразите схематически эту область параметров на диаграмме (μ, ξ) .
3. При каком соотношении между параметрами μ и ξ после второго удара шайба будет двигаться с прежней скоростью $\vec{v}_0$?
4. Пусть $\xi = 0,333$, $\mu = 0,330$. На какой угол изменится направление вектора скорости шайбы после всех ее столкновений со стержнем?

Решение.

1. Для решения задачи следует воспользоваться законами сохранения:

- импульса

$$mv_0 = mv_l + Mu; \quad (1)$$

- момента импульса (относительно вертикальной оси, проходящей через центр стержня)

$$mv_0 x = mv_l x + I\omega; \quad (2)$$

- энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_l^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}; \quad (3)$$

где $I = \frac{Ml^2}{12}$ - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр.

Итак, мы имеем три уравнения с тремя неизвестными величинами - v_l, u, ω ; причем одно из этих уравнений является квадратным, поэтому данная система имеет два решения. Однако одно из этих решений нам известно - это скорости до столкновения. Можно, и нужно использовать это

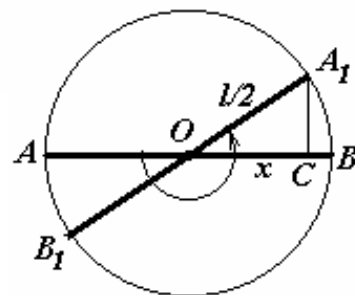
обстоятельство, для того, чтобы решить систему наиболее простым способом. Продемонстрируем подробно эти выкладки.

$u = \frac{m}{M}(v_0 - v_1)$ $\omega = \frac{mx}{I}(v_0 - v_1)$	Выражаем из уравнений (1) и (2);
$m(v_0^2 - v_1^2) = Mu^2 + I\omega^2$	переписываем уравнение (3) в виде;
$m(v_0^2 - v_1^2) = M\left(\frac{m}{M}(v_0 - v_1)\right)^2 +$ $+ I\left(\frac{mx}{I}(v_0 - v_1)\right)^2$	подставляем выражения для скоростей
$\mu(v_0 + v_1) = 12\xi^2(v_0 - v_1) +$ $+ (v_0 - v_1)$	теперь можно безболезненно сократить на $(v_0 - v_1)$, так как при этом мы потеряем корень, который нас не интересует; кроме того, сразу можно ввести требуемые безразмерные параметры $\mu = \frac{M}{m} \text{ и } \xi = \frac{x}{l};$
$v_1 = v_0 \frac{12\xi^2 + 1 - \mu}{12\xi^2 + 1 + \mu};$ $u = v_0 \frac{2}{12\xi^2 + 1 + \mu}; \quad (4)$ $\omega l = v_0 \frac{24\xi}{12\xi^2 + 1 + \mu}.$	выражаем значение скорости шайбы после удара u , с помощью первой строки данной таблицы, скорость центра стержня и угловую скорость его вращения.

Формулы (4) дает ответ на первый вопрос задачи.

2. Рассмотрим движение шайбы и стержня после первого удара. Этот анализ удобно проводить в системе отсчета, связанной с центром стержня O . В этой системе стержень вращается с найденной угловой скоростью ω и «заметает» круг радиусом $l/2$. Второй удар может произойти только в пределах этого круга. Допустим, что скорость шайбы больше, чем скорость центра стержня $v_1 - u > 0$. Из формул (4) следует, что это условие будет выполняться, если справедливо неравенство

$$\mu < 12\xi^2 - 1. \quad (5)$$



Чтобы избежать второго удара, шайба должна успеть «выскочить» за пределы этого круга (то есть пройти отрезок CA_1) прежде, чем ее настигнет конец стержня A . Для того, чтобы пройти отрезок CA_1 шайбе потребуется

время $t_1 = \frac{\sqrt{(l/2)^2 - x^2}}{v_1 - u}$, а стержень повернется на угол

$\angle AOA_1 = \pi + \arccos(\frac{x}{l/2})$, за время $t_2 = \frac{\pi + \arccos(\frac{2x}{l})}{\omega}$. Понятно, что

второго столкновения не произойдет, если $t_2 > t_1$. Используя выражения (4), после элементарных и очевидных преобразований можно получить требуемое условие

$$\mu < 12\xi^2 - 1 - \frac{12\xi\sqrt{1-4\xi^2}}{\pi - \arccos 2\xi}. \quad (6)$$

Заметьте, что при выполнении неравенства (6), автоматически выполняется и неравенство (5).

Аналогично рассмотрим случай, когда $v_1 - u < 0$, что будет выполняться при

$$\mu > 12\xi^2 - 1. \quad (7)$$

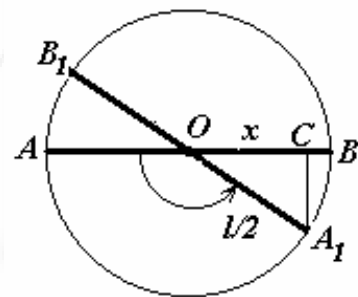
Сохраняя прежние обозначения и рассуждения, в этом случае запишем:

- время движения шайбы за пределы «опасного» круга остается прежним

$$t_1 = \frac{\sqrt{(l/2)^2 - x^2}}{u - v_1};$$

- время поворота стержня до точки A_1

$$t_2 = \frac{\pi - \arccos(\frac{2x}{l})}{\omega}.$$



Столкновения не произойдет, если $t_2 > t_1$. С помощью формул (4), находим условие отсутствия столкновения в этом случае

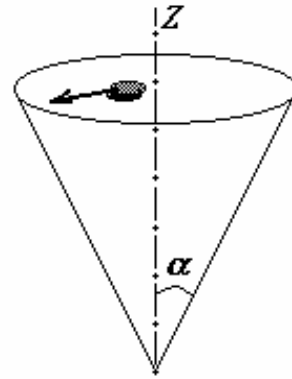
$$\mu > 12\xi^2 - 1 + \frac{12\xi\sqrt{1-4\xi^2}}{\pi - \arccos 2\xi}. \quad (8)$$

И в этом случае выполнение неравенства (8) влечет выполнение неравенства (7). Таким образом, объединение неравенств (6) и (8) дает ответ на второй вопрос задачи.

Функции, фигурирующие в этих неравенствах достаточно сложны для того, чтобы точно построить требуемые области на диаграмме (μ, ξ) . Однако построить их схематически вполне по силам.

Задача 4. «Внутри конуса»

Исследуется движение без трения небольшой шайбы (которую можно считать материальной точкой) по внутренней поверхности конуса, ось которого Z вертикальна, а тангенс угла полураствора α равен k .



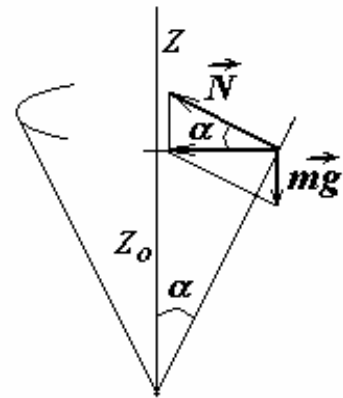
1. Какова должна быть скорость шайбы V_0 , чтобы она могла двигаться по поверхности конуса в горизонтальной плоскости на высоте z_0 от вершины конуса?
2. Шайбе, находящейся на высоте z_0 от вершины конуса, сообщили скорость V в горизонтальном направлении вдоль поверхности конуса. Найдите пределы изменения координаты z шайбы в процессе ее движения.
3. Шайба движется в горизонтальной плоскости на высоте z_0 от вершины конуса. Затем в результате толчка ее скорость увеличивается на небольшую величину v (направление вектора скорости при этом не изменяется). Найдите в каких пределах будет изменяться координата z шайбы в процессе движения и период ее колебаний вдоль вертикальной оси.
4. Шайба движется в горизонтальной плоскости на высоте z_0 от вершины конуса. Затем ей толчком сообщают небольшое приращение скорости v , направленное вверх вдоль образующей конуса ($v \ll \sqrt{gz_0}$). Найдите в каких пределах будет изменяться координата z шайбы в процессе движения и период ее колебаний вдоль вертикальной оси.

Рекомендуем воспользоваться приближенной формулой

$$(1+x)^{-2} \approx 1 - 2x + 3x^2$$

Решение.

1. В процессе движения на шайбу действуют две силы: $m\vec{g}$ - сила тяжести, направленная вертикально вниз; $\vec{N}$ - сила реакции, направленная перпендикулярно поверхности конуса. Для того, что бы шайба двигалась на постоянной высоте z_0 , необходимо, чтобы сумма этих сил была направлена горизонтально к оси конуса и обеспечивала шайбе центростремительное ускорение $\frac{V_0^2}{r}$, где



$r = z_0 \tan \alpha$ - радиус окружности, по которой движется шайба. На основании второго закона Ньютона и, глядя на рисунок, можно записать уравнение

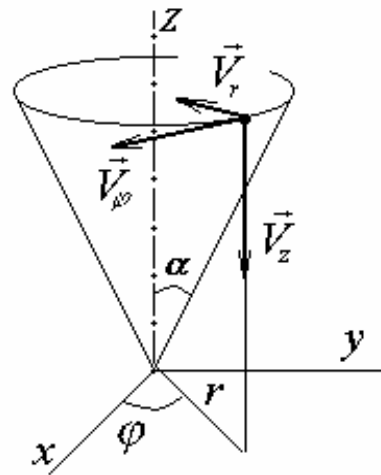
$$\frac{mV_0^2}{z_0 \tan \alpha} = \frac{mg}{\tan \alpha}, \quad (1)$$

из которого следует, что искомая скорость шайбы должна быть

$$\boxed{V_0 = \sqrt{gz_0}}. \quad (2)$$

2. Для изучения характера движения шайбы при произвольном значении начальной скорости воспользуемся законами сохранения механической энергии (она сохраняется, так как отсутствуют силы трения) и момента импульса, который сохраняется в следствие очевидной осевой симметрии задачи.

Положение шайбы удобно в данном случае задавать с помощью следующих координат: z - высота от вершины конуса, r - расстояние до оси конуса, φ - угол поворота. Соответствующие этим координатам компоненты скорости шайбы V_z, V_r, V_φ показаны на рисунке.



Уравнение закона сохранения механической энергии имеет вид

$$\frac{m(V_z^2 + V_r^2 + V_\varphi^2)}{2} + mgz = \frac{mV^2}{2} + mgz_0. \quad (3)$$

Так как $r = z \tan \alpha = kz$, то и $V_r = kV_z$, поэтому уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{(1+k^2)V_z^2}{2} + \frac{V_\varphi^2}{2} + gz = \frac{V^2}{2} + gz_0. \quad (4)$$

Закон сохранения момента импульса относительно оси конуса дает уравнение

$$mrV_\varphi = mr_0V. \quad (5)$$

в котором учтено, что начальная скорость шайбы $\vec{V}$ направлена горизонтально. Принимая во внимание прямопропорциональную связь между координатами r и z , из уравнения (5) можно выразить

$$V_\varphi = \frac{z_0V}{z}. \quad (6)$$

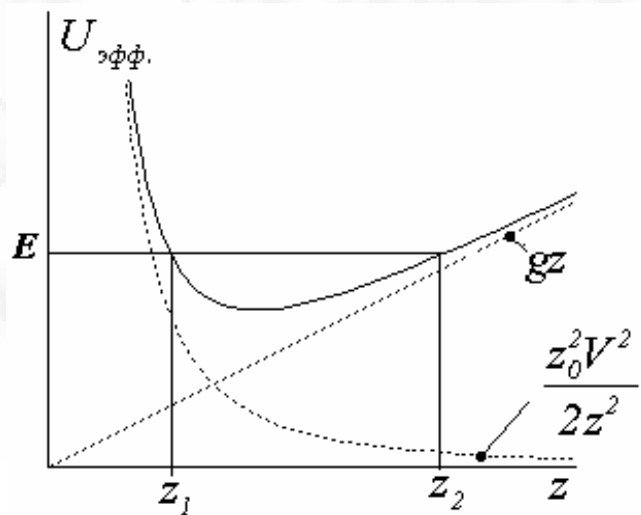
Подставляя это выражение в уравнение (4), получим

$$\frac{(1+k^2)V_z^2}{2} + \frac{z_0^2V^2}{2z^2} + gz = \frac{V^2}{2} + gz_0. \quad (7)$$

По своему виду это уравнение соответствует уравнению закона сохранения механической энергии при движении материальной точки вдоль одной оси z , если считать, что потенциальная энергия точки зависит от координаты z по закону

$$U_{\text{эфф.}}(z) = \frac{z_0^2V^2}{2z^2} + gz. \quad (8)$$

Особо подчеркнем, что указанное соответствие носит чисто формальный, математический характер, так как физический смысл первого слагаемого в последнем выражении - часть кинетической энергии. Однако, благодаря закону сохранения момента импульса его удалось представить в виде функции от координаты z . Поэтому функцию (8) часто называют «эффективной» потенциальной энергией. Теперь можно проанализировать характер движения вдоль этой оси, построив график зависимости $U_{\text{эфф.}}(z)$. На рисунке пунктирные кривые соответствуют



отдельным слагаемым формулы (8), сплошная линия - их сумма. Если полная энергия точки равна E , то точки возврата являются абсциссами z_1, z_2 точек пересечения горизонтальной прямой $U_{\text{эфф.}} = E$ с графиком функции $U_{\text{эфф.}}(z)$. Отметим, однако, что вид потенциальной кривой зависит от начальных условий, что еще раз подтверждает, что в данном случае потенциальная энергия является «эффективной».

Для того, чтобы найти пределы изменения координаты z шайбы, необходимо в уравнении (7) положить $V_z = 0$, так как именно в крайних точках (точках возврата) соответствующая скорость принимает нулевые значения. Таким образом, получаем

$$\frac{z_0^2 V^2}{2z^2} + gz = \frac{V^2}{2} + gz_0 \quad (9)$$

Обратите внимание, относительно неизвестной величины z полученное уравнение является уравнением третьей степени. Однако, оно может быть решено элементарными методами, так как один из корней уравнения известен - он соответствует начальным условиям $z_1 = z_0$. Это обстоятельство позволяет понизить степень уравнения посредством следующих преобразований:

$$\frac{V^2}{2} \left(\frac{z_0^2}{z^2} - 1 \right) = g(z_0 - z) \Rightarrow \frac{V^2}{2} \cdot \frac{z_0^2 - z^2}{z^2} = g(z_0 - z);$$

и после сокращения и приведения к общему знаменателю, получить квадратное уравнение

$$z^2 - \frac{V^2}{2g} \cdot z - \frac{V^2}{2g} \cdot z_0 = 0.$$

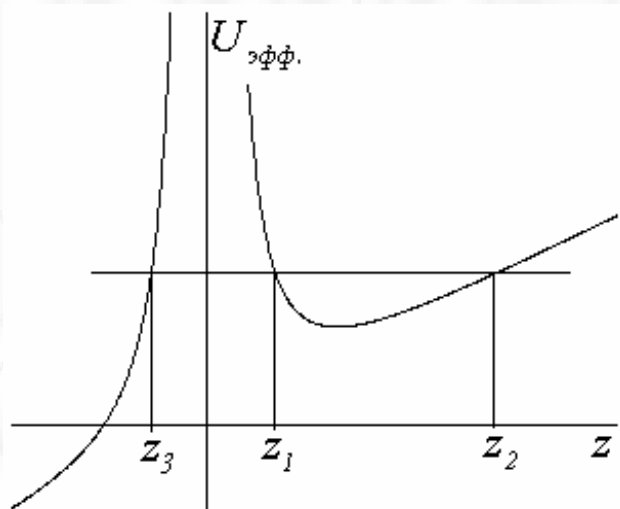
Корни этого уравнения

$$z_{2,3} = \frac{V^2}{4g} \left(1 \pm \sqrt{1 + 8 \frac{gz_0}{V^2}} \right). \quad (10)$$

Отрицательный корень физического смысла не имеет - шайба не может «проскочить» через точку $z = 0$ - вершину конуса. Этот корень появился из-за того, что формально, функция (8) определена и при $z < 0$ (см. рисунок). Поэтому мы это корень отбросим.

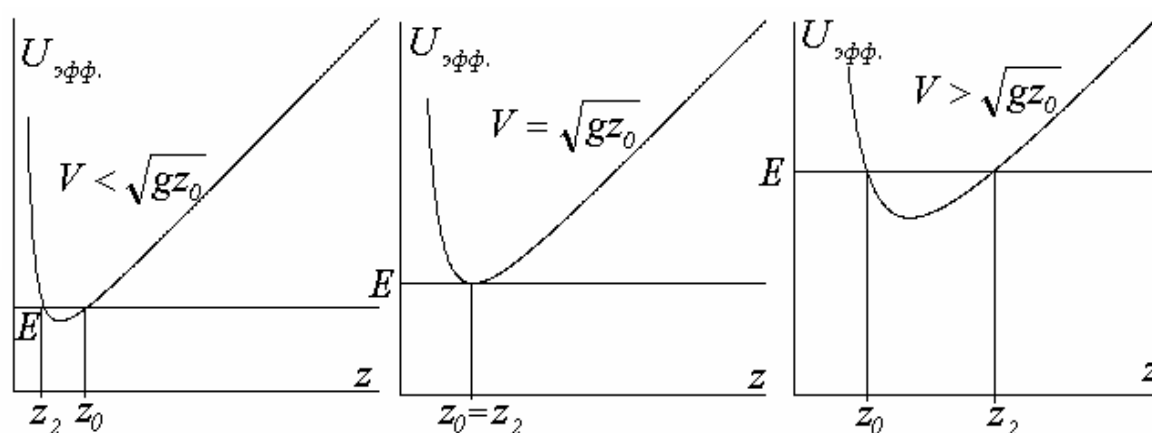
Итак, координата z в процессе движения шайбы будет изменяться в пределах

$$z \in \left[z_0, \frac{V^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{gz_0}{V^2}} \right) \right]. \quad (11)$$



Отметим, что при $V = V_0 = \sqrt{gz_0}$, второй предел изменения вертикальной координаты равен z_0 , то есть эта координата не будет изменяться в ходе движения - иными словами, шайба будет двигаться по окружности в горизонтальной плоскости. Этот результат был получен нами в первой части задачи. При $V < V_0$ шайба первоначально начнет опускаться ($z_2 < z_0$), при $V > V_0$ шайба будет подниматься по поверхности конуса. Эти частные случаи можно проиллюстрировать с помощью потенциальной кривой.

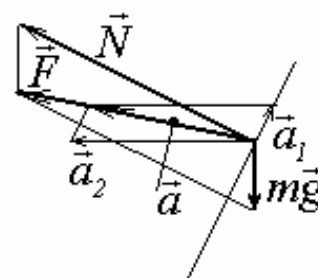
Обратите внимание на изменение вида графика функции эффективной потенциальной энергии.



На всех рисунках отрезком горизонтальной прямой отмечен уровень полной механической энергии шайбы $E = \frac{V^2}{2} + gz$.

Попытаемся прояснить еще один своеобразный парадокс. Как мы установили, в процессе движения шайба будет совершать колебания в вертикальном направлении, изменяя свою координату z в установленных пределах (естественно, что в то же время шайба будет также постоянно вращаться вокруг вертикальной оси конуса). При этом на определенных интервалах она будет подниматься. Какая же сила будет сообщать шайбе ускорение направленное вверх вдоль внутренней поверхности конуса? Действительно, на шайбу действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила реакции $\vec{N}$, направленная перпендикулярно поверхности конуса. Их сумма $\vec{F}$ не может иметь составляющую вдоль поверхности конуса, направленную вверх!

Вспомним, что по 2 закону Ньютона, вектор результирующей силы совпадает с направлением полного ускорения, которое в данном случае является суммой центростремительного ускорения $\vec{a}_2$ и ускорения $\vec{a}_1$, изменяющего величину проекции скорости на боковую поверхность конуса. Это суммарное ускорение $\vec{a}$ вполне может быть направлено также как и суммарная сила. Иными словами, ускорение $\vec{a}_1$, «компенсируется» соответствующей компонентой центростремительного ускорения $\vec{a}_2$ (см. рисунок), так, что никакого парадокса и противоречия со вторым законом Ньютона нет.



3. Если шайба движется в горизонтальной плоскости, то ее скорость определяется формулой (2) $V_0 = \sqrt{gz_0}$. После того, как шайбе сообщили дополнительное приращение скорости v , ее энергия и момент импульса изменились. Однако, уравнения законов сохранения энергии и момента импульса (4)-(5) полностью сохраняют свой вид, если подставить новое значение скорости $V = V_0 + v$. Поэтому пределы изменения координаты z можно рассчитать по формуле (11).

$$z_1 = z_0; \quad z_2 = \frac{(V_0 + v)^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{gz_0}{(V_0 + v)^2}} \right) \quad (12)$$

Упростим ответ, учтя, что $v \ll V_0$.

Эти преобразования рассмотрим, достаточно подробно, с некоторыми комментариями.

$\frac{(V_0 + v)^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{gz_0}{(V_0 + v)^2}} \right)$	исходное выражение, заметьте, что второе слагаемое под корнем не является малым
$\frac{V_0^2 (1 + v/V_0)^2}{4g} \left(1 + \sqrt{1 + 8 \frac{gz_0}{V_0^2 (1 + v/V_0)^2}} \right)$	выделяем в явном виде малый безразмерный параметр v/V_0
$\frac{z_0}{4} (1 + 2 \frac{v}{V_0}) \left(1 + \sqrt{1 + 8(1 - 2 \frac{v}{V_0})} \right)$	подставляем значение V_0^2 и используем формулу $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$
$\frac{z_0}{4} (1 + 2 \frac{v}{V_0}) \left(1 + \sqrt{9 - 16 \frac{v}{V_0}} \right)$	раскрываем скобки
$\frac{z_0}{4} (1 + 2 \frac{v}{V_0}) \left(1 + 3 \sqrt{1 - \frac{16}{9} \frac{v}{V_0}} \right)$	
$\frac{z_0}{4} (1 + 2 \frac{v}{V_0}) \left(1 + 3(1 - \frac{8}{9} \frac{v}{V_0}) \right)$	еще раз используем формулу $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$
$z_0 (1 + 2 \frac{v}{V_0}) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{v}{V_0} \right)$	преобразуем дроби
$z_0 (1 + \frac{4}{3} \frac{v}{V_0})$	раскрываем скобки, пренебрегая малым членом $(\frac{v}{V_0})^2$

Эти достаточно громоздкие преобразования можно существенно упростить, используя формулу разложения Тэйлора (если Вы, конечно, знакомы с ним):

$$z = F(V_0 + v) \approx F(V_0) + F'(V_0) \cdot v.$$

Вычисление производной $F'(V_0)$, в данном случае также не очень простая операция, но все же она короче, чем представленное выше разложение. Можете убедиться самостоятельно, что результат будет тем же.

Таким образом, вертикальная координата изменяется в пределах от z_0 до $z_0 (1 + \frac{4}{3} \frac{v}{V_0}) = z_0 (1 + \frac{4}{3} \frac{v}{\sqrt{gz_0}})$. При малом v пределы изменения координаты малы, поэтому и колебания вдоль вертикальной оси можно

считать малыми и для определения их периода можно воспользоваться стандартной методикой, основанной на анализе закона сохранения энергии.

Если при движении с одной степенью свободы, описываемой некоторой координатой ξ , закон сохранения энергии может быть записан в виде

$$\frac{\mu v_{\xi}^2}{2} + \frac{\kappa \xi^2}{2} = \text{const}, \quad (13)$$

где μ, κ - некоторые постоянные величины, v_{ξ} - скорость изменения координаты ξ , то движение частицы представляют собой гармонические колебания с круговой частотой $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ и периодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\kappa}}$. Отметим, что случае, соответствующем уравнению (13), величина ξ есть отклонение от положения равновесия. Если в законе сохранения энергии появляется слагаемое линейно зависящее от координаты

$$\frac{\mu v_{\xi}^2}{2} + \frac{\kappa \xi^2}{2} + \beta \xi = \text{const},$$

то этот член не изменяет период колебаний, а приводит к смещению положения равновесия - в этом случае координата ξ отсчитывается не от положения равновесия, а от некоторой иной точки.

Преобразуем выражение для эффективной потенциальной энергии (8), полагая $z = z_0 + \xi$, где $\xi \ll z_0$.

$U_{\text{эфф.}}(z) = \frac{z_0^2 V^2}{2z^2} + gz$	исходное выражение
$\frac{z_0^2 (V_0 + v)^2}{2(z_0 + \xi)^2} + g(z_0 + \xi)$	подставляем выражения, включающие малые величины
$\frac{z_0^2 V_0^2 (1 + v/V_0)^2}{2z_0^2 (1 + \xi/z_0)^2} + gz_0 + g\xi$	выделяем в явном виде безразмерные малые параметры
$\frac{V_0^2}{2} (1 + \frac{v}{V_0})^2 (1 - 2(\frac{\xi}{z_0}) + 3(\frac{\xi}{z_0})^2) + gz_0 + g\xi$	используем приближенную формулу, приведенную в условии задачи; обратите внимание - разлагаем до второго порядка малости!
$A + B\xi + \frac{3V_0^2}{2z_0^2} (1 + \frac{v}{V_0})^2 \xi^2$	Раскрываем скобки, приводим подобные члены, не существенные для определения периода колебания константы A, B в явном виде не выписываем.

$A + B\xi + \frac{3gz_0}{2z_0^2}\xi^2$	Подставляем значение V_0^2, пренебрегаем малым слагаемым v/V_0 - это необходимо сделать, так в разложении мы оставляем члены не выше второго порядка малости. Заметьте, если изначально пренебречь этим членом, то коэффициент B обратится в нуль, что с физической точки зрения не верно.
--	--

Тот же результат можно получить более формальным способом, используя третий член в разложении Тэйлора

$$U(z_0 + \xi) \approx U(z_0) + U'(z_0) \cdot \xi + \frac{1}{2}U''(z_0) \cdot \xi^2.$$

То есть, коэффициент K в уравнении (13) равен второй производной от потенциальной энергии, взятой в точке равновесия.

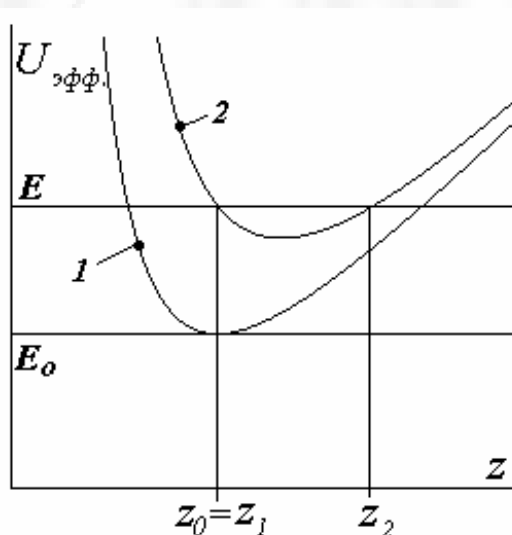
Подставим полученное выражение в закон сохранения энергии (7) и получим, с учетом $V_\xi = V_z$:

$$\frac{(1+k^2)V_\xi^2}{2} + \frac{3g}{2z_0}\xi^2 + B\xi = \text{const},$$

из которого следует, что период колебаний, согласно общей методике, определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1+k^2)z_0}{3g}} \quad (14)$$

Проиллюстрируем произошедшие изменения на графике потенциальной кривой - на рисунке: 1- потенциальная кривая до изменения скорости, E_0 - начальная энергия шайбы. После того, как шайбе сообщили дополнительную скорость изменилась кривая эффективной потенциальной энергии 2 и увеличилась энергия шайбы E . Для наглядности рисунка мы увеличили скорость шайбы в полтора раза.



4. По-прежнему, при движении шайбы в горизонтальной плоскости ее скорость определяется выражением $V_0 = \sqrt{gz_0}$. Если шайбе сообщить дополнительное приращение скорости v , направленное вдоль боковой

поверхности конуса, то ее полная энергия увеличится на величину $\frac{mv^2}{2}$, а момент импульса останется неизменным. Поэтому уравнения (4)-(5) преобразуются к виду

$$\frac{(1+k^2)V_z^2}{2} + \frac{V_\phi^2}{2} + gz = \frac{V_0^2}{2} + \frac{v^2}{2} + gz_0, \quad (15)$$

$$mrV_\phi = mr_0V_0. \quad (16)$$

Избавляясь от V_ϕ , получим

$$\frac{(1+k^2)V_z^2}{2} + \frac{z_0^2V_0^2}{2z^2} + gz = \frac{V_0^2}{2} + \frac{v^2}{2} + gz_0. \quad (17)$$

Методика дальнейших расчетов остается прежней: полагая $V_z = 0$ и решая уравнение (17) относительно z , получим пределы изменения вертикальной координаты. Однако в данном случае уравнение (17) преобразуется к уравнению третьей степени, решить которое элементарными методами сложно. Воспользуемся тем обстоятельством, что $v \ll V_0$. Следовательно, изменение координаты z будет также мало. Поэтому можно сразу положить $z = z_0 + \xi$, где $\xi \ll z_0$, и провести разложение по малому параметру ξ/z_0 в самом уравнении (17). Так как нам необходимо получить два корня уравнения, то разложение необходимо вести до второго порядка малости. Цепочка преобразований в данном случае не слишком громоздка и подобна проведенным ранее, поэтому мы ее приведем без комментариев.

$$\frac{z_0^2V_0^2}{2(z_0 + \xi)^2} + g(z + \xi) = \frac{V_0^2}{2} + \frac{v^2}{2} + gz_0;$$

$$\frac{z_0^2V_0^2}{2z_0^2(1 + \xi/z_0)^2} + g(z_0 + \xi) = \frac{V_0^2}{2} + \frac{v^2}{2} + gz_0;$$

$$\frac{V_0^2}{2} \left(1 - 2\frac{\xi}{z_0} + 3\left(\frac{\xi}{z_0}\right)^2\right) + g(z_0 + \xi) = \frac{V_0^2}{2} + \frac{v^2}{2} + gz_0;$$

$$\frac{V_0^2}{2} 3\left(\frac{\xi}{z_0}\right)^2 = \frac{v^2}{2};$$

$$\frac{3}{2} \frac{g}{z_0} \xi^2 = \frac{v^2}{2} .$$

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{z_0 v^2}{3g}}$$

Таким образом, пределы изменения вертикальной координаты определяются выражениями:

$$z_1 = z_0 - \sqrt{\frac{z_0 v^2}{3g}}; \quad z_2 = z_0 + \sqrt{\frac{z_0 v^2}{3g}} \quad (18)$$

Обратите внимание, что в данном случае точка z_0 является точкой равновесия, об этом свидетельствует отсутствие линейного по ξ слагаемого в выражении для эффективной потенциальной энергии. Заметим также, что пределы изменения вертикальной координаты не зависят от того, как направлено изменение скорости «вверх» или «вниз».

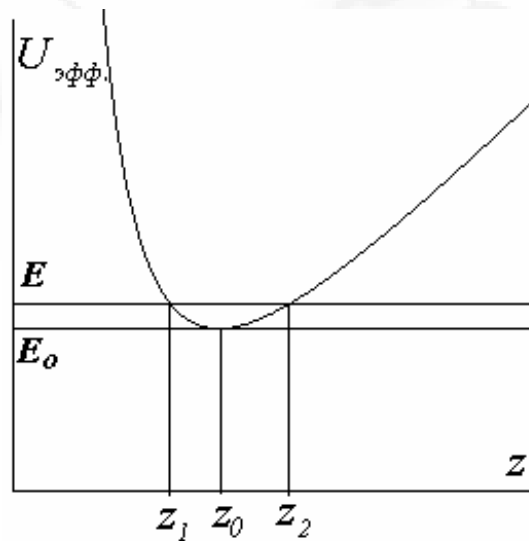
Подставим упрощенное выражение для эффективной потенциальной энергии в уравнение (17), получим

$$\frac{(1+k^2)V_\xi^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{g}{z_0} \xi^2 = \frac{v^2}{2} . \quad (19)$$

Из этого уравнения следует, что период колебаний вдоль вертикальной оси в этом случае определяется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{3g}} . \quad (20)$$

Дадим графическую иллюстрацию и в этом случае. Так как эффективная потенциальная энергия определяется только радиальной составляющей скорости, то она осталась неизменной. Изменилась только полная энергия шайбы. Как и в предыдущем случае, приращение скорости в два раза меньше скорости начальной. Заметьте, что изменение полной энергии в данном случае меньше.



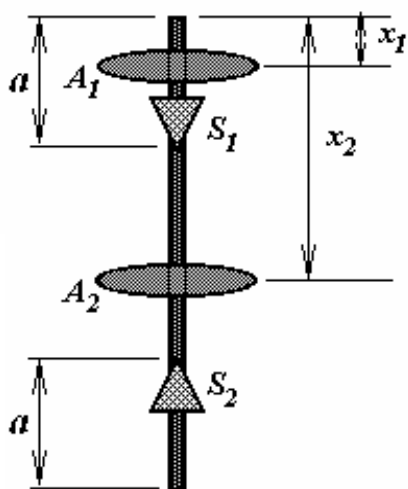
Для закрепления методики решения задач такого типа рекомендую самостоятельно решить практически аналогичную задачу.

Военный космический корабль движется с выключенными двигателями по круговой орбите на высоте $h = 600 \text{ км}$ над поверхностью Земли. На корабле установлена пушка, которая может выпускать снаряды со скоростью $v_0 = 800 \text{ м/с}$ относительно корабля. Масса снаряда значительно меньше массы корабля.

1. Снаряд выстрелили в направлении движения корабля.
 - а) На какое максимальное расстояние от поверхности Земли удалится снаряд?
 - б) Найдите период обращения снаряда вокруг Земли.
2. Снаряд выстреливают в направлении противоположном центру Земли.
 - а) Найдите максимальное и минимальное удаление снаряда от поверхности Земли.
 - б) Чему равен период обращения снаряда в этом случае?
 - в) При каких начальных скоростях снаряда относительно корабля снаряд сможет упасть на Землю?

Задача 5. «Оборотный маятник»

Оборотный маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной l , по которому можно перемещать две одинаковых массивных чечевицы A_1 и A_2 . Положение чечевиц определяется координатами x_1 и x_2 . Маятник может колебаться в вертикальной плоскости, будучи подвешенным на упорах S_1 или S_2 (в этом случае его необходимо перевернуть). Масса стержня значительно меньше массы чечевиц. Чечевицы можно считать материальными точками. Расстояния от упоров до концов стержня одинаковы и равны a .



1. Найдите периоды колебаний маятника в прямом (на упоре S_1) и обратном (на упоре S_2) положениях в зависимости от x_1 и x_2 .
2. Постройте график зависимости периода колебаний маятника в прямом положении при $x_1 = \frac{a}{2}$ от положения второй чечевицы.
3. Найдите множество значений x_1, x_2 , при которых период колебаний маятника T_1 в прямом положении один и тот же. Постройте эти множества точек на диаграмме (x_1, x_2) для различных значений T_1 . Постройте аналогичные кривые для колебаний маятника в обратном положении.

4. На диаграмме (x_1, x_2) постройте множество значений (x_1, x_2) , при которых периоды колебаний маятника в прямом и обратном положениях равны и постоянны. Покажите, что этот период равен периоду колебаний математического маятника с длиной равной расстоянию между упорами.

Решение.

1. Воспользуемся известной формулой для периода колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgb}}, \quad (1)$$

где M - масса маятника, I - момент инерции маятника относительно оси вращения, b - расстояние от оси вращения до центра масс маятника. Момент инерции маятника в прямом положении рассчитывается по формуле

$$I = m(a - x_1)^2 + m(x_2 - a)^2, \quad (2)$$

здесь m - масса одной чечевицы. Расстояние от центра масс до оси вращения вычисляется по формуле

$$b = \frac{x_1 + x_2}{2} - a = \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a)}{2}. \quad (3)$$

Таким образом, период колебаний математического маятника в прямом положении выражается формулой (учитывая, что масса маятника $M = 2m$)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(a - x_1)^2 + (x_2 - a)^2}{g((x_1 - a) + (x_2 - a))}}. \quad (4)$$

Формула для периода колебаний в обратном положении может быть получена из (4) заменой $x_2 \rightarrow (l - x_2)$, $x_1 \rightarrow (l - x_1)$:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{(a - l + x_1)^2 + (l - x_2 - a)^2}{g((l - x_1 - a) + (l - x_2 - a))}}. \quad (5)$$

2. Для построения требуемого графика функции $T_1(x_2)$ подставим $x_1 = \frac{a}{2}$ и преобразуем выражение (4)

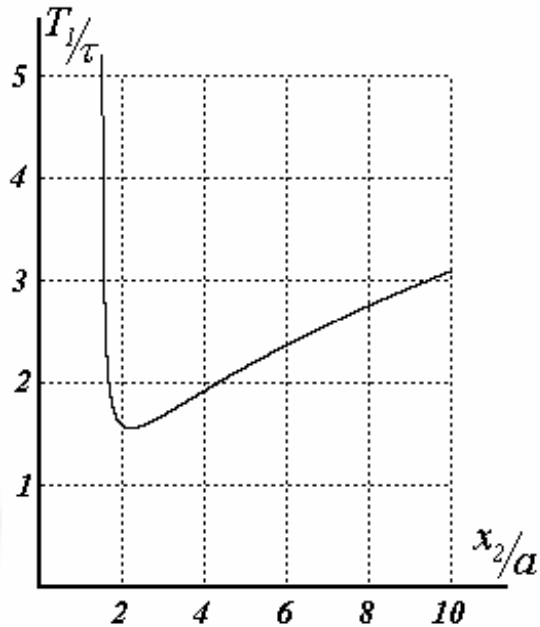
$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(a - x_1)^2 + (x_2 - a)^2}{g((x_1 - a) + (x_2 - a))}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \sqrt{\frac{(\frac{x_2}{a} - 1)^2 + \frac{1}{4}}{\frac{x_2}{a} - \frac{3}{2}}}. \quad (6)$$

График этой функции удобно строить в следующих координатах: по горизонтали - отношение x_2 / a ; по вертикали -

T_1 / τ , где $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$. Тогда

проанализировать и построить график этой функции можно по известным методикам.

Результат построения представлен на рисунке.



3. Из формулы (4) следует, что множество точек (x_1, x_2) , для которых период колебаний T_1 постоянен удовлетворяет уравнению

$$\frac{(a - x_1)^2 + (x_2 - a)^2}{(x_1 - a) + (x_2 - a)} = \frac{gT_1^2}{4\pi^2}. \quad (7)$$

Если обозначить $\frac{gT_1^2}{4\pi^2} = 2p$, то уравнение (7) легко привести к виду

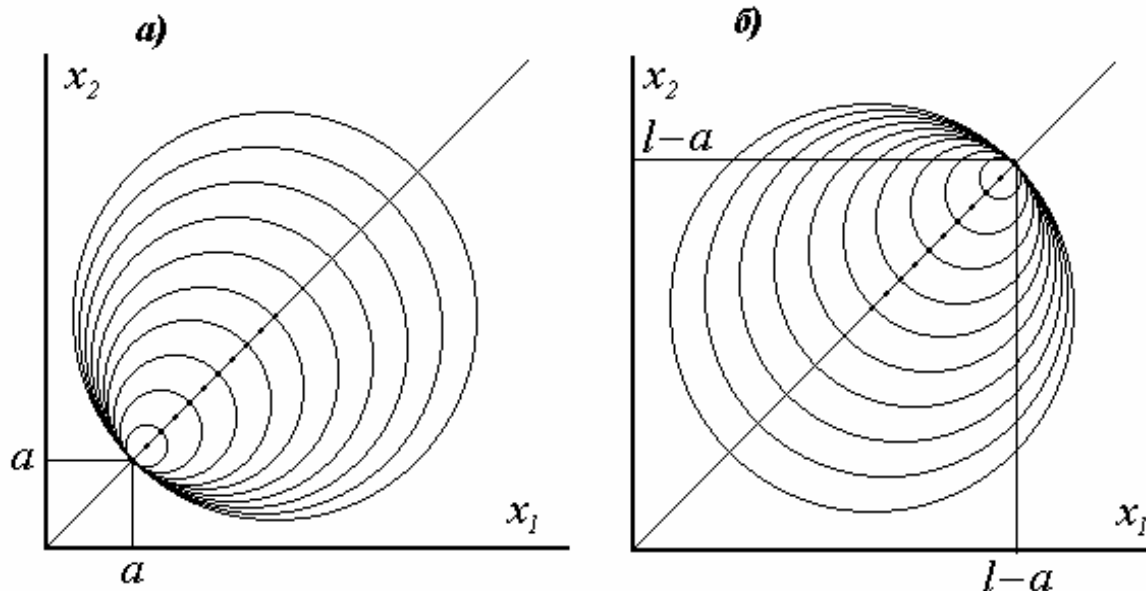
$$(x_1 - a - p)^2 + (x_2 - a - p)^2 = 2p^2, \quad (8)$$

которое является уравнением окружности радиуса $\sqrt{2}p$, центр которой имеет координаты $x_1 = x_2 = a + p$. Увеличение периода колебаний T_1 приводит к увеличению параметра p . Легко заметить, что все окружности семейства (8) проходят через точку $x_1 = x_2 = a$, как бы «вырастают из нее»- рисунок а).

Семейство точек, удовлетворяющих условию $T_2 = const$, можно получить из рассмотренного семейства тем же, что и ранее преобразованием $x_2 \rightarrow (l - x_2)$, $x_1 \rightarrow (l - x_1)$. В этом случае уравнение множества точек $T_2 = const$ будет иметь вид

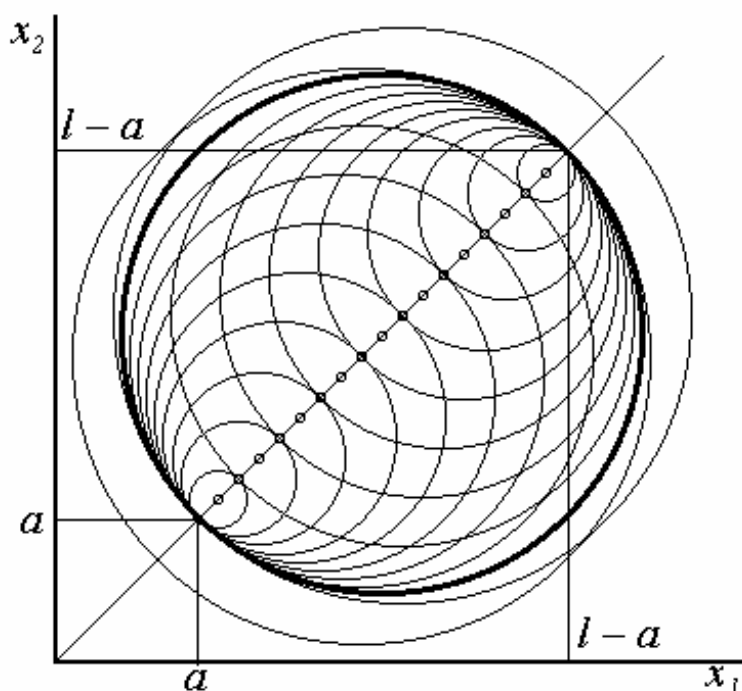
$$(l - x_1 - a - p)^2 + (l - x_2 - a - p)^2 = 2p^2, \quad (9)$$

и описывать окружности, «произрастающие из точки» $x_1 = x_2 = l - a$, см. рисунок б).



4. Для того, что бы определить множество точек для которых периоды колебаний в прямом и обратном положении были одинаковы, необходимо найти окружность, которая принадлежит обоим семействам. Такой линией является окружность, проходящая через точки $x_1 = x_2 = a$ и $x_1 = x_2 = l - a$.

На рисунке она выделена как более жирная.



Уравнение этой окружности имеет вид

$$(x_1 - l/2)^2 + (x_2 - l/2)^2 = (l/2 - a)^2 \quad (10)$$

Период колебаний в этом случае можно рассчитать по формуле (4) положив в ней $x_1 = x_2 = l - a$:

$$T_l = 2\pi \sqrt{\frac{(a - x_1)^2 + (x_2 - a)^2}{g((x_1 - a) + (x_2 - a))}} = 2\pi \sqrt{\frac{l - 2a}{g}} \quad (11)$$

К аналогичному результату приводит применение формулы (5), если положить в ней $x_1 = x_2 = a$. Формула (11) описывает также период колебаний математического маятника с длиной равной расстоянию между упорами.

Замечания.

Оборотный маятник, описанный в данной задаче также носит имя маятника Бесселя. Он достаточно широко применяется для точного измерения ускорения свободного падения. Суть таких измерений сводится к определению такого периода колебаний, который был бы одинаков как в прямом, так и в обратном положениях, и последующем применении формулы (11).

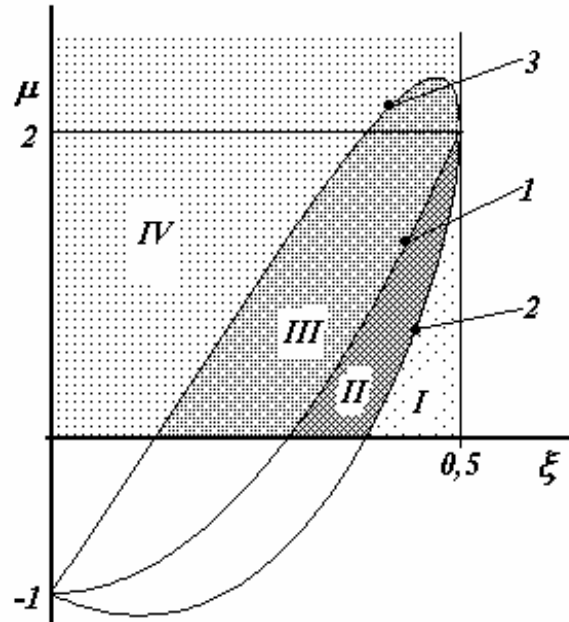
Сначала можно построить график параболы $12\xi^2 - 1$ на интервале изменения параметра $\xi \in [0, 1/2]$ (кривая 1). Немного ниже будет лежать график функции

$$12\xi^2 - 1 - \frac{12\xi\sqrt{1-4\xi^2}}{\pi - \arccos 2\xi}.$$

Можно

заметить, что дополнительное слагаемое неотрицательно и обращается в нуль на концах рассматриваемого интервала (кривая 2). Немного выше будет лежать график функции

$$12\xi^2 - 1 + \frac{12\xi\sqrt{1-4\xi^2}}{\pi - \arccos 2\xi},$$



в которой дополнительное слагаемое также неотрицательно и обращается в нуль на концах рассматриваемого интервала (кривая 3). На представленном рисунке эти функции построены с помощью компьютера точно. Конечно, физический смысл имеет область только положительных значений параметра μ . Таким образом, область допустимых значений рассматриваемых параметров разбивается на четыре части:

- в области I выполняется неравенство (6), то есть шайба успеет проскочить «вперед» до тех пор, пока ее догонит вращающийся стержень;
- в области II выполняется неравенство (5), следовательно, шайба будет двигаться «вперед», но не выполняется (6), поэтому стержень успеет ее догнать;
- в области III выполняется неравенство (7), следовательно, относительно центра стержня шайба будет двигаться «назад» и испытает столкновение со стержнем, так как не выполняется неравенство (8);
- наконец, в области IV выполняется неравенство (8), следовательно, шайба отразится «назад», не испытав второго столкновения со стержнем.

3. Если после первого удара скорости шайбы и центра стержня окажутся равными, то в системе отсчета, связанной с центром стержня, второй удар произойдет в той же точке (обозначенной буквой С на предыдущих рисунках), что и первый. Поэтому после него восстановятся характеристики движения, существовавшие до первого удара. Следовательно, для того чтобы после второго удара шайба двигалась с прежней скоростью необходимо выполнения условия $v_1 = u$, что достигается при

$$\boxed{\mu = 12\xi^2 - 1}. \quad (9)$$

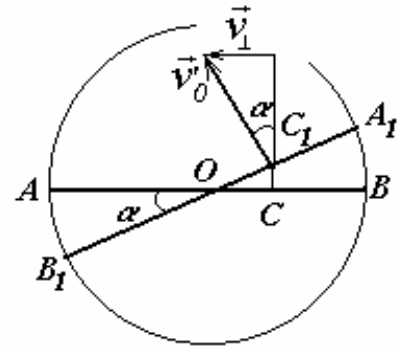
4. Необходимо заметить, что при заданных значениях параметров, после первого удара скорости шайбы и центра стержня оказываются весьма близки. Действительно, подсчет по формулам (4) показывает, что

$$v_1 - u = v_0 \frac{12\xi^2 - 1 - \mu}{12\xi^2 + 1 + \mu} \approx 2,51 \cdot 10^{-4} v_0 ;$$

$$\omega l = v_0 \frac{24\xi}{12\xi^2 + 1 + \mu} \approx 3,00 v_0.$$

Стержень сделает поворот за время $\tau = \frac{\pi}{\omega} \approx 1,05 \frac{l}{v_0}$, за это же время

шайба пройдет путь относительно центра стержня равный $\delta = (v_1 - u)\tau \approx 2,63 \cdot 10^{-4} l$. (На рис. отрезок CC_1 , который сильно приуменьшен). Так как угол α мал (и равен $\alpha \approx \frac{\delta}{l\xi} \approx 7,88 \cdot 10^{-3}$), то можно



считать, что после удара шайба восстановит свою первоначальную скорость $v'_0 = v_0 - u$ (не забывайте - мы работаем в системе отсчета, связанной с центром стержня!), но направлена она будет перпендикулярно стержню в момент удара. Следовательно, после второго удара шайба преобретет малую компоненту скорости, перпендикулярную первоначальному направлению и равную

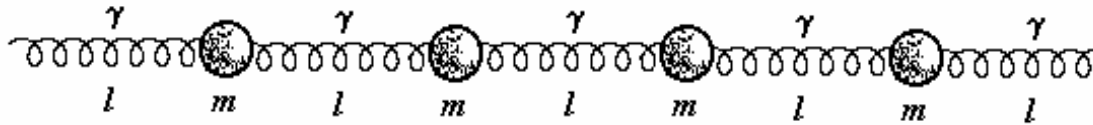
$$v_{\perp} = (v_0 - u)\alpha = v_0 \frac{12\xi^2 - 1 + \mu}{12\xi^2 + 1 + \mu} \alpha \approx 1,96 \cdot 10^{-4} v_0.$$

Изменение компоненты скорости, параллельной первоначальному направлению мало, поэтому направление скорости изменится на малый угол

$$\beta = \frac{v_{\perp}}{v_0} \approx 2,0 \cdot 10^{-4}.$$

Задача 6. «Упругая цепочка»

Бесконечная цепочка состоит из одинаковых шариков (масса каждого m), соединенных одинаковыми легкими пружинами (жесткость каждой γ). В положении равновесия расстояния между шариками равны l , пружины немного растянуты так, что сила натяжения каждой равна T_0 .



Часть 1. Продольные волны.

Допустим, что каждый шарик может двигаться только в направлении вдоль цепочки.

1.1 Найдите собственную частоту колебаний одного из шариков ω_0 , если два соседних закреплены.

1.2 По цепочке распространяется продольная волна. Найдите сдвиг фаз между колебаниями двух соседних шариков при частоте волн ω .

1.3 При каких частотах колебаний ω по цепочке могут распространяться бегущие волны?

1.4 Найдите скорость распространения продольной волны по цепочке. Постройте примерный график этой зависимости.

1.5 Найдите скорость распространения продольной волны при частотах $\omega \ll \omega_0$. Покажите, что полученное выражение можно считать аналогом формулы для скорости звука в упругой среде $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где E - модуль Юнга, ρ - плотность среды.

1.6 В цепочке неподвижно закрепили неподвижно два шарика так, что между ними оказалось n шариков. Определите все частоты собственных колебаний этого участка цепочки, соответствующие различным модам стоячих волн.

Часть 2. Поперечные волны.

Пусть шарики способны перемещаться только в направлении перпендикулярном цепочке, причем их смещения малы ($\Delta x \ll l$).

2.1 Определите частоту поперечных колебаний одного шарика, если два соседних закреплены.

2.2 Найдите скорость распространения поперечной волны по цепочке.

2.3 Найдите скорость распространения поперечной волны при частотах $\omega \ll \omega_0$. Покажите, что полученное выражение можно считать аналогом формулы для скорости поперечных волн в упругой среде $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, где G - модуль сдвига, ρ - плотность среды.

2.4 Найдите минимально возможную длину волны, которая может распространяться по цепочке.

2.5 На основании качественных рассуждений определите, как зависит скорость распространения поперечной волны от ее амплитуды, когда смещение шариков сравнимо с расстоянием между ними.

Решение.

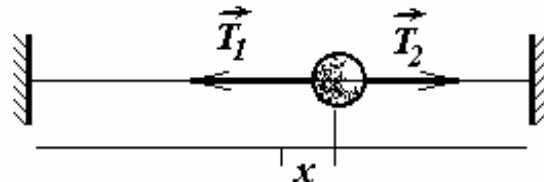
Часть 1.

1.1 Обозначим смещение шарика от положения равновесия через x .

На шарик будут действовать силы упругости пружин, причем, на основании закона Гука можно записать

$$T_1 = T_0 + \gamma \cdot x$$

$$T_2 = T_0 - \gamma \cdot x.$$



Уравнение движения шарика имеет вид

$$ma = T_2 - T_1,$$

где a - ускорение шарика, подставляя выражения для сил упругости, получим

$$ma = -2\gamma \cdot x. \quad (1)$$

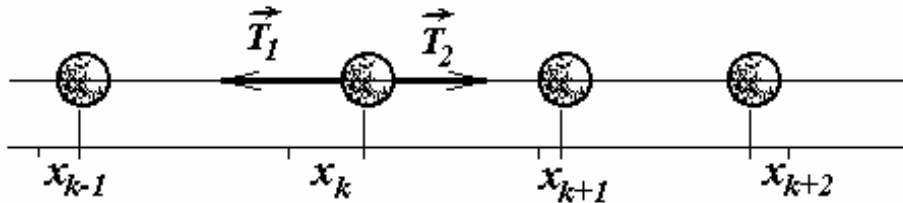
Это уравнение описывает гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\gamma}{m}}. \quad (2)$$

Так как сила упругости пропорциональна деформации пружины, то в уравнениях движения можно не учитывать начальную деформацию пружин и наличие начальной силы их натяжения T_0 . Действительно, каждый шарик соединен с двумя пружинами с противоположных сторон, поэтому силы T_0 будут компенсировать друг друга, и в

уравнениях движения будут оставаться только линейные члены, возникающие из-за дополнительных деформаций пружин.

1.2 Рассмотрим бесконечную цепочку. Пронумеруем все шарики, обозначим смещение k -го шарика от его положения равновесия через x_k , а его ускорение a_k .



На основании второго закона Ньютона запишем уравнение

движения k -го шарика

$$ma_k = -T_1 + T_2,$$

или, принимая во внимание закон Гука,

$$ma_k = -\gamma(x_k - x_{k-1}) + \gamma(x_{k+1} - x_k).$$

Разделим обе части уравнения на m и приведем подобные члены.

$$a_k = -\omega_0^2 x_k + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k-1} + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k+1}. \quad (3)$$

Таким образом, мы получили бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений, определяющих ускорения каждого шарика. Без задания дополнительных условий эта система имеет бесконечно много решений. В данном случае нас интересует решения типа бегущей волны, для которой смещения шариков изменяются по гармоническому закону с одинаковыми частотами и амплитудами, но разными начальными фазами колебаний. Поэтому будем искать решение системы (3) в виде

$$x_k = A \cos(\omega t + \varphi_k). \quad (4)$$

Понятно, что сдвиги фаз колебаний между соседними шариками $\Delta\varphi$ должны быть одинаковы, кроме того, выбор начальной фазы колебаний одного из шариков произволен. Поэтому в уравнение (3) подставим следующие выражения для смещений

$$\begin{aligned} x_k &= A \cos(\omega t) \\ x_{k-1} &= A \cos(\omega t - \Delta\varphi). \\ x_{k+1} &= A \cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

Получим:

$$-A\omega^2 \cos \omega t = -A\omega_0^2 \cos \omega t + A\frac{\omega_0^2}{2} \cos(\omega t - \Delta\varphi) + A\frac{\omega_0^2}{2} \cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

Воспользовавшись тригонометрической формулой для суммы косинусов, это уравнение можно преобразовать к виду

$$-A\omega^2 \cos \omega t = -A\omega_0^2 \cos \omega t + A\omega_0^2 \cos \omega t \cos \Delta\varphi.$$

После сокращения на $A \cos \omega t$, из последнего уравнения выразим значение косинуса сдвига фаз

$$\cos \Delta\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad (6)$$

а величина сдвига фаз определяется формулой

$$\Delta\varphi = \pm \arccos\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right). \quad (7)$$

Заметим, что два знака в полученном решении соответствуют бегущим волнам, распространяющимся в противоположных направлениях.

1.3 Так как величина косинуса действительного аргумента не может превышать по модулю единицу, то на возможные частоты бегущих волн накладывается ограничение (следующее из формулы (6))

$$\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right| \leq 1,$$

из которого находим

$$\omega \leq \sqrt{2}\omega_0 = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \quad (8)$$

Мы получили, что при частотах больших, чем определяется формулой (8) не существует решений уравнений (3), в виде бегущих волн, что и свидетельствует о том, что существует предельная частота волн, которые могут распространяться по цепочке. Физический смысл полученного ограничения мы выясним несколько позднее.

1.4 Как было отмечено ранее начальная фаза колебаний одного из шариков может быть выбрана произвольно, поэтому решение уравнений (3) можно записать в виде

$$x_k = A \cos(\omega t + k\Delta\varphi),$$

где величина $\Delta\varphi$ определяется формулой (7). Для того, что бы рассчитать скорость распространения волны, выразим номер шарика k через его координату z - $k = \frac{z}{l}$. (Напомним, что величины x_k обозначают смещения шариков от их собственных положений равновесия, мы обозначаем координатой z положение шарика).

Теперь мы имеем уравнение бегущей волны в явном виде:

$$x(z, t) = A \cos\left(\omega t + \frac{z}{l} \Delta\varphi\right). \quad (9)$$

Скорость распространения волны s можно получить из условия постоянства фазы одной из точек, «привязанной» к самой волне:

$$\omega t + \frac{z}{l} \Delta\varphi = \text{const}, \text{ откуда следует}$$

$$c = \left| \frac{\Delta z}{\Delta t} \right| = \frac{\omega l}{\Delta \varphi} = \frac{\omega l}{\arccos(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}. \quad (10)$$

Для построения графика зависимости $c(\omega)$, найдем значение скорости волны при малых частотах, $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$. В этом пределе сдвиг фаз между колебаниями соседних точек является малой величиной, поэтому можно положить $\cos \Delta \varphi = 1 - \frac{(\Delta \varphi)^2}{2}$. Тогда из уравнения (6) следует: $\Delta \varphi = \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{2}$.

Подставляя это значение в формулу (10), получим скорость распространения низкочастотных волн

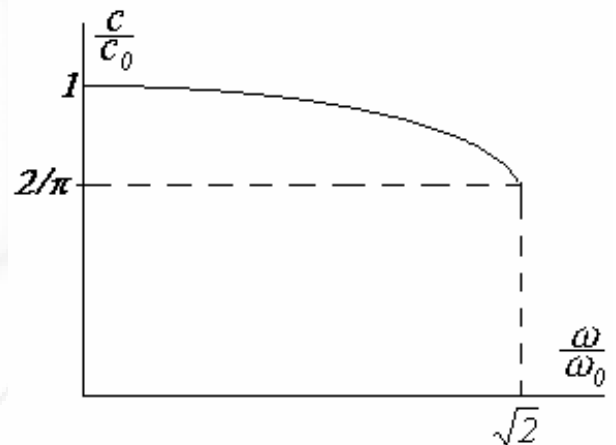
$$c_0 = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Используя это значение формулу (10) перепишем в виде

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\sqrt{2}(\omega / \omega_0)}{\arccos(1 - (\omega / \omega_0)^2)}, \quad (12)$$

в котором скорость волны выражается через отношение частот ω / ω_0 .

Напомним, что частота ω не может превышать $\sqrt{2}\omega_0$. При $\omega / \omega_0 = \sqrt{2}$ функция (12) принимает значение, равное $2 / \pi$. Таким образом, эта функция является монотонно убывающей от 1 до $2 / \pi \approx 0,64$.



Как видно из проведенного анализа, скорость волны достаточно слабо зависит от ее частоты, а при малых частотах этой зависимость можно пренебречь и считать скорость волны, постоянной. Рассматриваемая система является достаточно хорошей моделью упругих волн в твердых телах. В твердых телах величина ω_0 настолько велика, что даже при ультразвуковых частотах хорошо выполняется низкочастотное приближение.

1.5 В низкочастотном пределе скорость волны определяется формулой (11), если подставить значение ω_0 , получим

$$c_0 = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{2}} = l \sqrt{\frac{\gamma}{m}}. \quad (13)$$

Покажем, что эта формула является аналогом формулы для скорости звука в твердых телах $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Запишем закон Гука в форме $\sigma = E\varepsilon$, где σ -

механическое напряжение, возникающее в теле при относительной деформации ε . Наша задача является одномерным аналогом сплошного твердого тела, поэтому аналогом механического напряжения будет сила

упругости пружинки $T = \gamma$, относительная деформация может быть записана в виде $\varepsilon = \frac{x}{l}$, тогда $T = \gamma \varepsilon$. Таким образом, видим, что аналогом модуля Юнга служит величина γ . Аналогом плотности является отношение $\frac{m}{l}$. Если подставить эти выражения в формулу для скорости звука, то получим

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = l \sqrt{\frac{\gamma}{m}},$$

в полном соответствии с рассчитанной скоростью продольных волн по цепочке.

1.6 Для изучения стоячих волн обратимся к системе уравнений (3)

$$a_k = -\omega_0^2 x_k + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k-1} + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k+1}.$$

Теперь решение этих уравнений необходимо искать в форме стоячей волны, для которой частоты и фазы колебаний для всех шариков одинаковы, а амплитуды изменяются по гармоническому закону. Кроме того, необходимо учесть, что в данном случае наша цепочка ограничена, причем амплитуды колебаний нулевого и $(n+1)$ -го шариков равны нулю. Положим

$$x_k = A \sin k\beta \cos \omega t. \quad (14)$$

При такой записи при $k=0$ колебания нулевого шарика отсутствуют, $x_0 = 0$. Также должно выполняться условие $x_{n+1} = 0$, которое налагает ограничения на возможные значения параметра β :

$\sin(n+1)\beta = 0$, откуда следует $(n+1)\beta = j\pi$, или

$$\beta_j = j \frac{\pi}{n+1}; \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n. \quad (15)$$

Подставим пробное решение (14) с определенным значением β_j в уравнения движения

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \sin k\beta_j \cos \omega t &= -A\omega_0^2 \sin k\beta_j \cos \omega t + \\ &+ A\frac{\omega_0^2}{2} \sin(k-1)\beta_j \cos \omega t + A\frac{\omega_0^2}{2} \sin(k+1)\beta_j \cos \omega t; \end{aligned}$$

после сокращения и применения формулы для суммы синусов получим

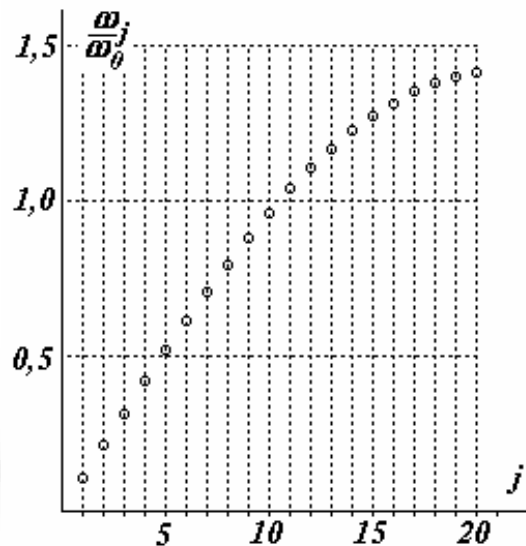
$$-\omega^2 \sin k\beta_j = -\omega_0^2 \sin k\beta_j + \omega_0^2 \sin k\beta_j \cos \beta_j.$$

С учетом условия (15) получаем спектр возможных частот собственных колебаний цепочки

$$\boxed{\omega_j = \omega_0 \sqrt{1 - \cos \frac{j\pi}{n+1}}; \quad j = 1, 2, 3, \dots} \quad (16)$$

На рисунке спектр частот представлен для $n = 20$.

Так как в данном случае система обладает двадцатью степенями свободы, то и число собственных частот равно двадцати. Обратите внимание, низшие частоты практически эквидистантны (отличаются на одну и ту же величину), с ростом частот ее зависимость от порядкового номера становится заметно нелинейной - начинает сказываться зависимость скорости волны от частоты.



Еще раз обратим внимание на неоднозначность решения системы уравнений (3): сначала мы искали (и нашли!) решение в виде бегущих волн; а затем в виде стоячих. Правда, во втором случае мы наложили дополнительные (граничные) условия. В общем случае, для того, чтобы решение системы было однозначным необходимо задать еще и начальные условия: значения начальных положений и скоростей всех шариков цепочки. Тогда решение может быть представлено в виде суперпозиции найденных волн (построение решения в виде суммы найденных решений допустимо, так как сама система является линейной).

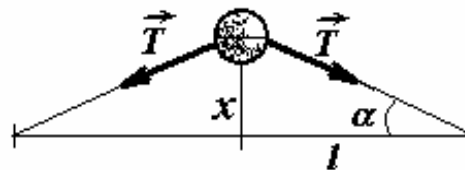
Заметим также, что бегущая волна, образованная сложением простых гармонических волн, не будет сохранять свою форму в процессе распространения, так как скорость волны зависит от ее частоты (имеет место дисперсия волн).

Часть 2. Поперечные волны.

2.1 Запишем уравнение движения шарика при его малом смещении x в направлении перпендикулярном цепочке. Так как смещение мы считаем малым, то и угол α мал, (можно

положить $\alpha \approx \frac{x}{l}$);

кроме того, следует пренебречь изменением силы натяжения



цепочки (изменение этой силы пропорционально x^2 , поэтому в линейном приближении малых колебаний должно быть опущено).

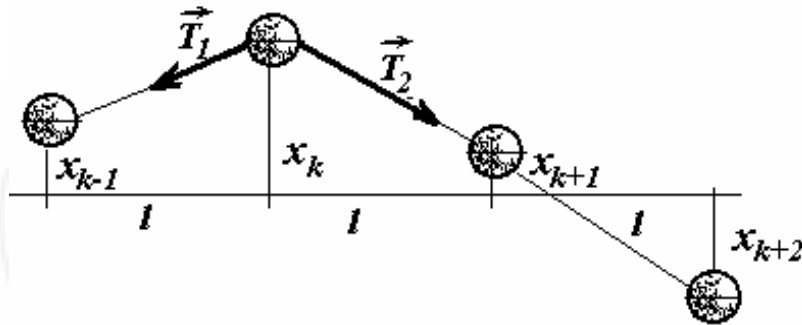
$$ma = -2T_0 \sin \alpha = -2T_0 \frac{x}{l}. \quad (17)$$

Из этого уравнения следует, что частота малых колебаний шарика определяется формулой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2T_0}{ml}}. \quad (18)$$

Если в положения равновесия пружинки не натянуты, то даже малые поперечные колебания будут нелинейны, так как возвращающая сила в этом случае будет пропорциональна x^3 .

2.2 Запишем уравнения движения одного из шариков бесконечной цепочки в том же приближении малых поперечных смещений.



$$ma_k = -T_0 \frac{x_k - x_{k-1}}{l} -$$

(19)

Приведем подобные члены, разделим на массу шарика m , используем

обозначение ω_0 , соответствующее формуле (18) и получим уравнение

$$a_k = -\omega_0^2 x_k + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k-1} + \frac{\omega_0^2}{2} x_{k+1}, \quad (20)$$

полностью совпадающее с уравнением (3). Поэтому и решения будут такими же. Не повторяя хода решения, запишем скорость распространения поперечных волн

$$c = \frac{\omega l}{\arccos(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}. \quad (21)$$

При малых частотах, эта формула переходит в

$$c_0 = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{T_0 l}{m}}. \quad (22)$$

2.3 Для деформации сдвига закон Гука имеет вид $\sigma = G\alpha$ (где σ - тангенциальное механическое напряжение, α - угол сдвига). В рассматриваемом одномерном случае аналогом механического напряжения является возвращающая сила $F = T_0\alpha$. Следовательно, аналогом модуля сдвига G является величина T_0 , аналогом плотности является отношение m/l . Подставляя эти величины в формулу для скорости распространения упругих волн в твердых телах, получим формулу

$$c_0 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{T_0 l}{m}},$$

полностью совпадающую с формулой (22).

2.4 Длина волны рассчитывается по формуле

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

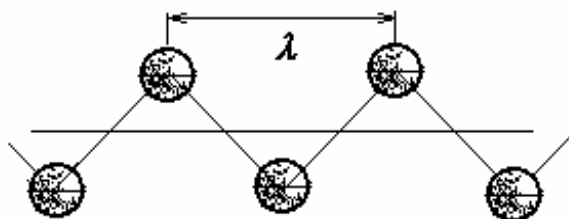
Используя выражение (21), получим

$$\lambda = \frac{2\pi l}{\arccos(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}. \quad (23)$$

Минимальной длине волны соответствует максимальная частота $\omega = \omega_0 \sqrt{2}$.

В этом пределе $\lambda_{\min} = 2l$.

Изобразим эту волну. Рисунок достаточно наглядно поясняет, почему существует минимально возможная длина волны, которая может распространяться по данной цепочке.



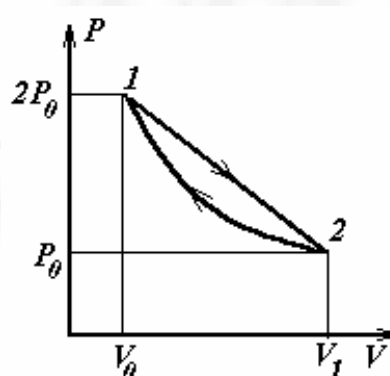
Полностью аналогичная ситуация встретила нам, при рассмотрении продольных волн, там также существует минимально возможная длина волны, соответствующая максимальной частоте колебаний.

2.5 При возрастании амплитуды колебаний возрастут силы упругости пружин, поэтому согласно формуле (21) скорость распространения волн увеличится.

Таким образом, в общем случае рассматриваемые волны являются нелинейными: скорость их распространения сложным образом зависит от амплитуды колебаний. Кроме того, для этих волн наблюдается явление дисперсии - зависимость скорости волн от их частоты. Исследование таких волн представляет собой весьма сложную математическую задачу, точное решение которой в настоящее время не известно.

Задача 7. «Прямая и адиабата»

Один моль идеального одноатомного газа совершает циклический процесс, изображенный на рисунке: $1 \rightarrow 2$ прямая, $2 \rightarrow 1$ - адиабата.



1. Найдите отношение V_1 / V_0 .
2. Какова максимальная температура газа в цикле?
3. Постройте примерный график зависимости теплоемкости газа на участке $1 \rightarrow 2$ от его объема.
4. Постройте график зависимости количества теплоты, полученной газом при расширении на участке $1 \rightarrow 2$, от его объема.
5. Найдите к.п.д. цикла.

Решение.

Предисловие.

Сразу видно (нужно использовать уравнение адиабаты, подсчитывать теплоту и работу и т.д.), что решение данной задачи будет насыщено многочисленными и громоздкими алгебраическими выкладками. Поэтому можно «упростить себе жизнь», избавившись от постоянных, фигурирующих в условии задачи. Это можно сделать, введя свою систему единиц измерения. Заметим, что во всех громоздких задачах такие замены переменных существенно упрощают математические преобразования, или, по меньшей мере, экономят бумагу.

В качестве единиц измерения давления и объема логично взять величины P_0 , V_0 . Тогда давление и объем P, V , измеренные в этих единицах (обозначим их малыми буквами p, v), будут соответственно определяться

$$p = \frac{P}{P_0}, \quad v = \frac{V}{V_0}. \quad (1)$$

Определим также единицу измерения температуры. Из уравнения состояния одного моля идеального газа и определений (1) выразим

$$T = \frac{PV}{R} = \frac{P_0 V_0}{R} pv. \quad (2)$$

Если теперь ввести единицу измерения температуры равную $\frac{P_0 V_0}{R}$, то температура в этих единицах примет вид

$$t = \frac{TR}{P_0 V_0}. \quad (3)$$

Тогда уравнение состояния принимает простой и изящный вид

$$pv = t. \quad (4)$$

Определим также единицы измерения работы, теплоты и энергии, используя известное соотношение для работы $A = P\Delta V = (P_0 V_0) p \Delta v$. Откуда видно, что в качестве единицы работы, теплоты и энергии следует взять произведение $P_0 V_0$. Тогда внутренняя энергия одноатомного идеального газа в этих единицах будет выражаться формулой

$$\Delta u = \frac{\Delta U}{P_0 V_0} = \frac{\frac{3}{2} R \Delta T}{P_0 V_0} = \frac{3}{2} \Delta t. \quad (5)$$

Наконец, найдем единицу измерения теплоемкости.

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{P_0 V_0 \Delta q}{\frac{P_0 V_0}{R} \Delta t} = R \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

откуда следует, что единицей теплоемкости является универсальная газовая постоянная, то есть

$$c = \frac{C}{R}. \quad (6)$$

Переход к обычным единицам измерения осуществляется по формулам, обратным к (1), (3), (5), (6).

Теперь можно притупить непосредственно к решению задачи.

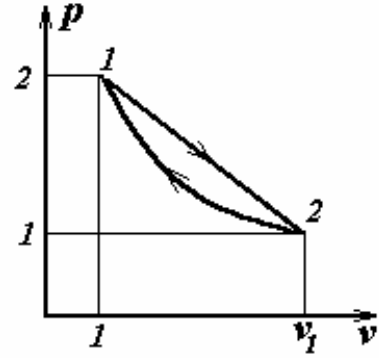
1. Перерисуем график рассматриваемого процесса в нашей системе единиц. Для этого необходимо только перенумеровать оси координат. Запишем уравнение адиабатического процесса $2 \rightarrow 1$

$$pv^\gamma = 2, \quad (7)$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$ показатель адиабаты для

одноатомного газа. (это обычное уравнение адиабатического процесса в которое подставлены начальные условия $p = 2, v = 1$). Из уравнения (7), полагая $p = 1$ находим

$$v_1 = \frac{V_1}{V_0} = 2^{1/\gamma} = 2^{\frac{3}{5}} \approx 1,516. \quad (8)$$



2. Процесс расширения на участке $1 \rightarrow 2$ описывается линейной функцией вида

$$p = 2 - a(v - 1),$$

где параметр зависимости a можно определить по известному значению давления и объема в крайней точке 2:

$$1 = 2 - a(v_1 - 1),$$

откуда следует, что $a = \frac{1}{v_1 - 1} \approx 1,94$, а уравнение процесса

$$p = 2 - \frac{v - 1}{v_1 - 1} = \frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1}. \quad (9)$$

Температуру газа можно вычислить из уравнения состояния идеального газа $pv = t$ и уравнения процесса (9):

$$t = pv = \frac{(2v_1 - 1 - v)v}{v_1 - 1}. \quad (10)$$

Эта функция имеет максимум¹ при

$$v_{(1)} = \frac{2v_1 - 1}{2} \approx 1,016, \quad (11)$$

соответствующее максимальное значение температуры определяется по формуле

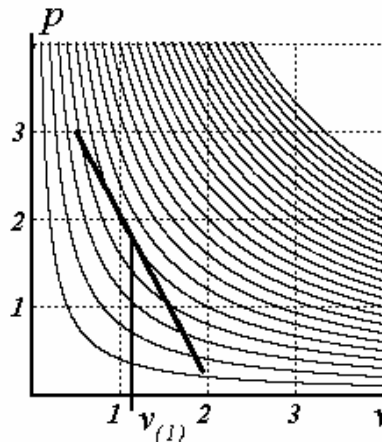
$$t_{max} = \frac{(2v_1 - 1 - v_{(1)})v_{(1)}}{v_1 - 1} = \frac{(v_1 - \frac{1}{2})^2}{v_1 - 1} \approx 2,00. \quad (12)$$

¹ Положение максимума можно искать традиционным универсальным способом, вычисляя производную и полагая ее равной нулю. Однако в данном случае функция квадратична, а ее экстремум лежит точно на середине между корнями, которые в выражении (10) очевидны.

Или в обычных единицах

$$T_{max} = 2,00 \frac{P_0 V_0}{R}$$

Изобразим на нашей диаграмме семейство изотерм и проведем участю к процесса $1 \rightarrow 2$. Видно, что в точке $v_{(1)} \approx 1,016$ исследуемая прямая является касательной к одной из изотерм, очевидно также, что этой изотерме соответствует максимальная температура. Эта точка близка к началу нашего цикла, поэтому максимальная температура лишь незначительно превышает температуру в точке 1, равную точно двум.



3. Для вычисления теплоемкости газа $c = \frac{\delta q}{dt}$ воспользуемся уравнением первого начала термодинамики²

$$\delta q = du + \delta a,$$

где δq - количество теплоты, полученной газом, du - изменение его внутренней энергии, δa - работа совершенная газом. Учитывая, что

$$\delta a = p dv, \text{ а для одноатомного идеального газа } du = \frac{3}{2} dt, \text{ для теплоемкости}$$

получим

$$c = \frac{\delta q}{dt} = \frac{3}{2} + p \frac{dv}{dt}. \quad (13)$$

Из уравнения процесса (9) найдем изменение температуры dt при изменении объема на величину dv -

$$dt = \frac{2v_1 - 1 - 2v}{v_1 - 1} dv$$

и подставим в формулу (13)

$$\begin{aligned} c &= \frac{\delta q}{dt} = \frac{3}{2} + p \frac{dv}{dt} = \frac{3}{2} + \frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1} \cdot \frac{dv}{\frac{2v_1 - 1 - 2v}{v_1 - 1} dv} = \\ &= \frac{10v_1 - 5 - 8v}{2v_1 - 1 - 2v} \approx \frac{2,54 - 2v}{1,017 - v}. \end{aligned} \quad (14)$$

² Обратите внимание на традиционно используемые обозначения: du - изменение внутренней энергии не зависит от вида процесса, так как внутренняя энергия является функцией состояния системы, $\delta q, \delta a$ - количество теплоты и совершенная работа являются характеристиками процесса и функциями состояния не являются.

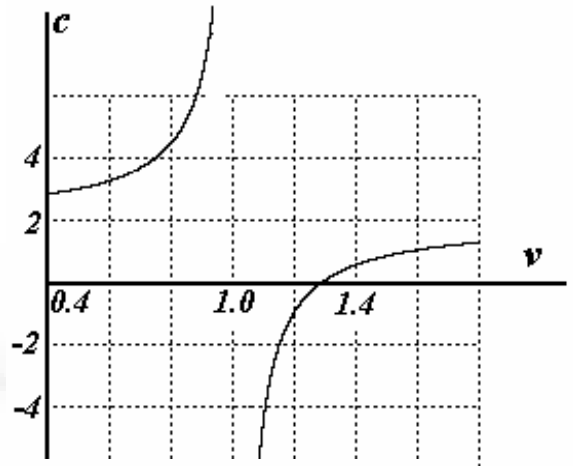
Эта функция терпит разрыв и устремляется к бесконечности в точке $v_{(1)} = \frac{2v_1 - 1}{2}$. Как мы определили

раньше, в этой точке температура газа максимальна, следовательно вблизи ее процесс близок к изотермическому, для которого теплоемкость бесконечна.

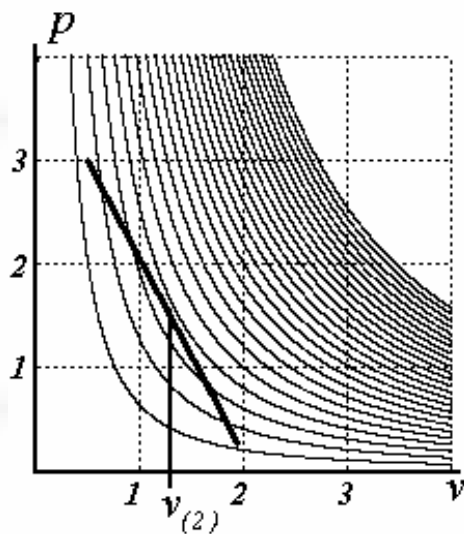
При $v_{(2)} = \frac{10v_1 - 5}{8} \approx 1,27$ теплоемкость

газа становится равной нулю, следовательно вблизи этой точки процесс близок к адиабатическому.

График этой функции представлен на рисунке.



Построим теперь семейство адиабат и нанесем на него участок изучаемого процесса. Хорошо заметно, что в точке $v_{(2)} \approx 1,27$ прямая касается адиабаты, поэтому в этой точке теплоемкость обращается в нуль.



4. Еще раз запишем уравнение второго начала термодинамики для участка процесса $1 \rightarrow 2$ при изменении объема от 1 до v :

$$q = \Delta u + a$$

Выражение для внутренней энергии представим в виде

$$\Delta u = \frac{3}{2} \Delta t = \frac{3}{2} \left(\frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1} - 2 \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(2v_1 - 1)v - v^2 - 2(v_1 - 1)}{v_1 - 1}. \quad (15)$$

Совершенная газом работа также легко может быть найдена из графика процесса (как площадь под участком прямой)

$$\begin{aligned} a &= \frac{2+p}{2} (v-1) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2v_1 - 1 - v}{v_1 - 1} \right) (v-1) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(4v_1 - 2)v - v^2 - (4v_1 - 3)}{v_1 - 1} \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом,

$$q = \Delta u + a = \frac{-4v^2 + v(10v_1 - 5) - (10v_1 - 9)}{2(v_1 - 1)}. \quad (17)$$

Зависимость полученной теплоты от объема является квадратичной функцией, которая достигает максимума при $v_{(2)} = \frac{10v_1 - 5}{8} \approx 1,27$, и максимальное значение функции

$$q_1 = q(v_{(2)}) = \frac{(10v_1 - 13)^2}{32(v_1 - 1)} \approx 0,281, \quad (16)$$

Как уже отмечалось, в этой точке теплоемкость равна нулю, то есть прямая процесса $1 \rightarrow 2$ близка к адиабате. Следовательно, при расширении до этого газ получает теплоту, а далее ее отдает. Таким образом количество полученной теплоты следует определять как максимальное значение функции (17), т.е. q_1 .

Совершенную за цикл работу определим как разность между полученной и отданной теплотой, то есть она равна значению функции (15) в крайней точке цикла $v = v_1$ -

$$a = q(v_1) = \frac{6v_1 - 9}{2} \approx 0,047. \quad (18)$$

При этом, мы учитываем, что участок цикла $2 \rightarrow 1$ является адиабатой, проходит без теплообмена. График функции (17) изображен на рисунке и представляет собой обычную параболу.

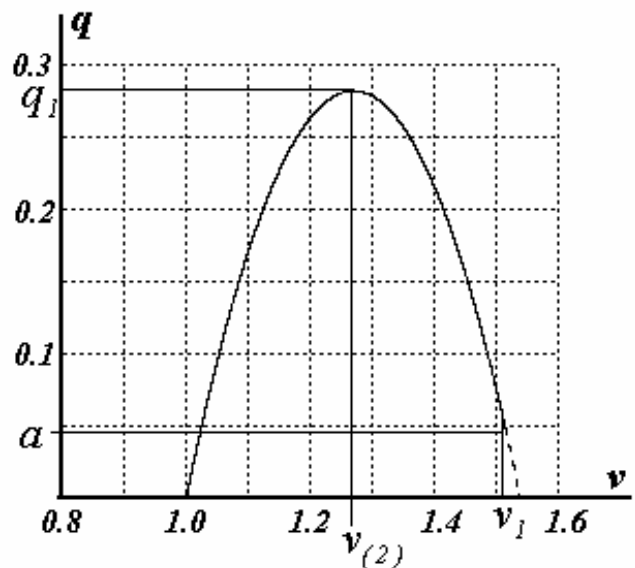
Заметим, что полную работу за цикл нельзя рассчитывать по формуле (16), так как она дает выражение для работы на участке $1 \rightarrow 2$, и не учитывает отрицательную работу по сжатию газа на обратном участке $2 \rightarrow 1$. Действительно, полагая в формуле (16) $v = v_1$, получим

$$a_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \frac{(4v_1 - 2)v_1 - v^2 - (4v_1 - 3)}{v_1 - 1} = \frac{3(v_1 - 1)}{2} \approx 0,77,$$

что значительно больше, чем ранее полученное правильное значение.

4. Теперь коэффициент полезного действия этого цикла вычисляется «по определению»

$$\eta = \frac{a}{q_1} \approx 0,17. \quad (18)$$



Замечания и комментарии.

1. Традиционный метод расчета коэффициента полезного действия заключается в определении участков, на которых рабочее тело получает и отдает теплоту, и последующему расчету этих теплот. В данном случае на одной прямой сначала происходит передача теплоты от нагревателя к рабочему телу, а затем от рабочего тела к холодильнику. Поэтому основная сложность данной задачи, определить то значение объема до которого газ получает и после которого отдает теплоту.

Заметим, что эта точка

- а) не является точкой максимальной температуры;
- б) точкой в которой теплоемкость становится отрицательной.

Эта точка есть точка касания с адиабатой.

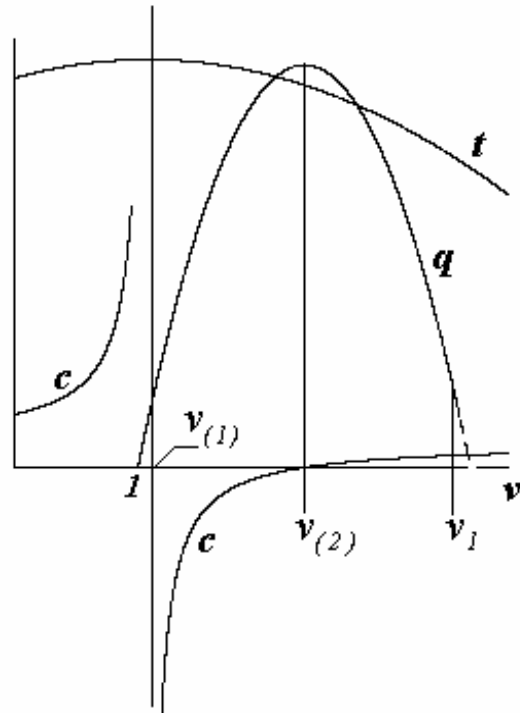
Рассмотрим различные участки этого интересного процесса подробнее, для чего на одном графике изобразим зависимости температуры, теплоемкости и количества полученной теплоты от объема (просто совместим все построенные ранее графики).

А) На участке $v < v_{(1)}$ теплоемкость положительна, температура возрастает ($c > 0, \Delta t > 0$) поэтому газ получает теплоту ($\delta q = c \Delta t > 0$).

Б) На участке $v_{(1)} < v < v_{(2)}$ теплоемкость отрицательна, но и температура уменьшается ($c < 0, \Delta t < 0$), поэтому здесь газ также получает теплоту ($\delta q = c \Delta t > 0$).

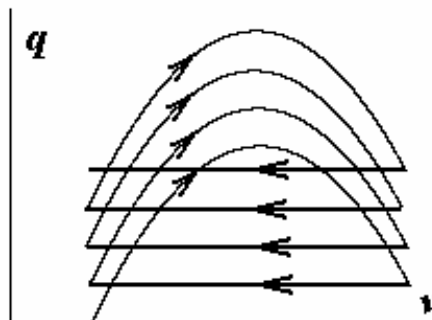
Этот участок характерен тем, что здесь газ совершает работу большую, чем полученное количество теплоты, восполняя недостаток за счет собственной внутренней энергии. Поэтому и происходит понижение его температуры.

В) На участке $v > v_{(2)}$ теплоемкость положительна, температура газа уменьшается ($c > 0, \Delta t < 0$), поэтому здесь газ отдает теплоту ($\delta q = c \Delta t < 0$).



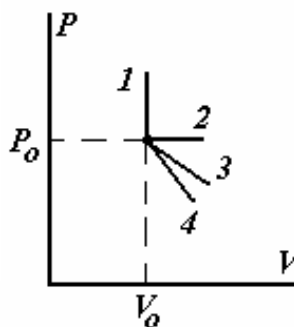
2. Особо подчеркнем, что теплота не является функцией состояния, поэтому график зависимости $q(v)$ необходимо понимать так, как оговорено в условии

q - есть количество теплоты, полученное при расширении газа, начиная от точки 1. Чтобы подчеркнуть, что теплота не является функцией состояния продолжим построение диаграммы в координатах (q, v) - адиабата изобразится прямой, параллельной оси v . Как и следовало ожидать, цикл в этих координатах не замыкается. Если нарисовать кривые, соответствующие второму, третьему прохождению цикла, то они пойдут выше.



3. Небольшой участок любого процесса можно приближенно заменить участком прямой (например, на диаграмме PV). Так на рисунке отрезки соответствуют следующим процессам (укажем также значения молярной теплоемкости для одноатомного газа):

1-изохора ($C = \frac{3}{2}R$); 2-изобара ($C = \frac{5}{2}R$); 3-изотерма ($C \rightarrow \infty$); 4-адиабата ($C = 0$). Как видите значение теплоемкости изменяется немонотонным образом.

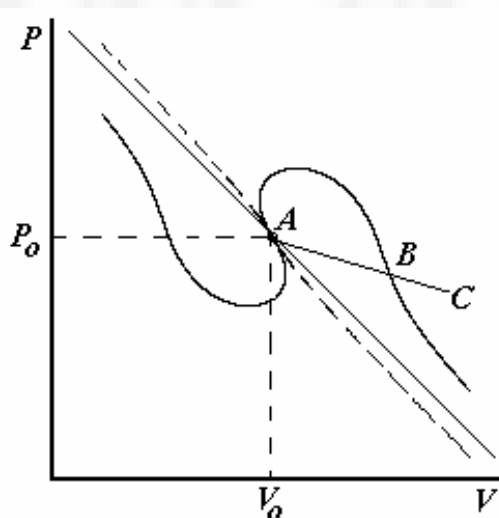


Посмотрим как изменяется теплоемкость процесса в зависимости от наклона его графика. Запишем уравнение процесса в виде $P = P_0 + k(V - V_0)$. Для него зависимость температуры от объема выражается уравнением $RT = (P_0 + k(V - V_0))V = (P_0 - kV_0)V + kV^2$.

Теплоемкость вычислим с помощью формулы (аналогичной (13), только в обычной системе единиц)

$$C = C_V + P \frac{dV}{dT} = C_V + R \frac{P_0 + k(V - V_0)}{P_0 - kV_0 + 2kV} = C_V + R \frac{P_0}{P_0 + kV_0}.$$

Предлагаю самостоятельно разобраться и проанализировать эту функцию. На рисунке приведен ее график «в полярных координатах». Так для процесса ABC теплоемкость пропорциональна длине отрезка AB . Сплошная прямая соответствует изотермическому процессу вблизи точки A , она же является асимптотой для графика теплоемкости. Пунктиром обозначены участки для которых теплоемкости отрицательны.



4. Рекомендую полностью решить исходную задачу в обычной системе единиц.

5. Решите также эту же задачу для аналогичного цикла (прямая и адиабата), если в пределах цикла объем увеличивается в два раза.

Задача 8. «Кристалл»

Рассмотрите свойства идеального кристалла с кубической решеткой, образованного одинаковыми атомами массой m . Потенциальная энергия взаимодействия двух атомов в кристалле зависит от расстояния между их центрами r по закону

$$U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6},$$

где a, b - некоторые положительные константы. Сила взаимодействия двух атомов связана с потенциальной энергией соотношением $F = -U'_r$, где U'_r - производная энергии по r . При расчете всех характеристик можно учитывать взаимодействие атома **только** с его ближайшими соседями.

Выразите через параметры a, b, m следующие характеристики кристалла:

- 1) Плотность ρ .
- 2) Удельную теплоту сублимации (перехода из кристаллического в газообразное состояние) λ .
- 3) Модуль Юнга кристалла E .
- 4) Максимальное относительное удлинение кристалла до его разрушения ε_{np} .
- 5) Предел прочности на разрыв (максимальное механическое напряжение, который может выдержать кристалл без разрушения) - σ_{np} .
- 6) Линейный коэффициент термического расширения кристалла α .

Рекомендуем использовать приближенную формулу, справедливую при малых величинах x :

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2,$$

в которой вы можете использовать столько членов, сколько требуется в конкретной ситуации.

Решение.

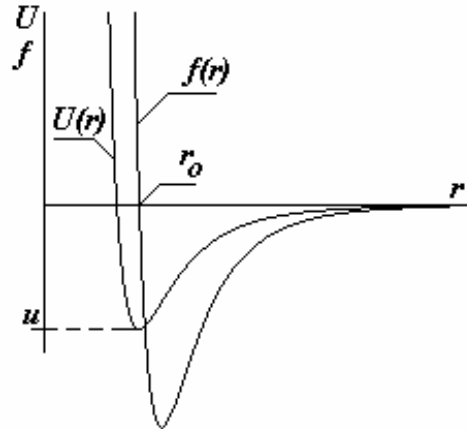
1. Вычислим силу взаимодействия между двумя атомами как функцию расстояния между ними

$$f = -U' = \frac{12a}{r^{13}} - \frac{6b}{r^7}. \quad (1)$$

Положению равновесия соответствует нулевая сила взаимодействия (или, что равносильно, минимум потенциальной энергии). Поэтому равновесное расстояние между атомами (период решетки) найдем из условия $f = 0$, из которого следует

$$r_0 = \left(\frac{2a}{b} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (2)$$

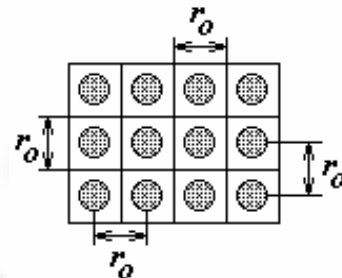
На рисунке представлены графики зависимостей потенциальной энергии $U(r)$ и силы взаимодействия $f(r)$ от расстояния между атомами. Положению равновесия соответствует точка $r = r_0$.



На один атом в кубической кристаллической решетке приходится объем r_0^3 , следовательно, плотность кристалла рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{m}{r_0^3} = m \sqrt[3]{\frac{b}{2a}}. \quad (3)$$

Рассматриваемую кристаллическую решетку можно представить как набор плотно упакованных кубиков, в центре которых расположен атом. Если расстояния между центрами атомов равно r_0 , то и длина ребра кубика равна r_0 .



2. Вычислим энергию связи, приходящуюся на один атом. Так как атом взаимодействует с $n = 6$ ближайшими соседями, то его потенциальная энергия

$$u = \frac{n}{2} U(r_0) = -\frac{3b^2}{4a}, \quad (4)$$

где учтено, что функция $U(r)$ описывает энергию взаимодействия двух атомов. Для перехода из кристаллического в газообразное состояние нужно сообщить кристаллу энергию, необходимую для разрыва всех связей, иными словами, удельная теплота сублимации рассчитывается по формуле

$$\lambda = -\frac{u}{m} = \frac{3b^2}{4am}. \quad (5)$$

3. При отклонении атомов от положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть атомы в исходное положение. При малых деформациях эта сила пропорциональна деформации. Для ее вычисления преобразуем формулу (1) при условии $r = r_0 + x$, где x - малое отклонение от положения равновесия. В ходе преобразований необходимо использовать приближенную формулу, приведенную в условии задачи с учетом членов первого порядка малости

$$f = \frac{12a}{(r_0 + x)^{13}} - \frac{6b}{(r_0 + x)^7} = \frac{12a}{r_0^{13}} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-13} - \frac{6b}{r_0^7} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-7} \approx$$

$$\approx -\frac{36b}{r_0^7} \cdot \frac{x}{r_0} \quad (6)$$

В поперечном сечении кристалла на один атом приходится площадь r_0^2 , следовательно, механическое напряжение в кристалле определяется формулой

$$\sigma = \frac{f}{r_0^2} = \frac{36b}{r_0^9} \cdot \frac{x}{r_0} = \frac{18}{\sqrt{2}} b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{r_0} \quad (7)$$

Сравнивая с законом Гука $\sigma = E\varepsilon$ (где $\varepsilon = x / r_0$ - относительная деформация), получим выражение для модуля Юнга

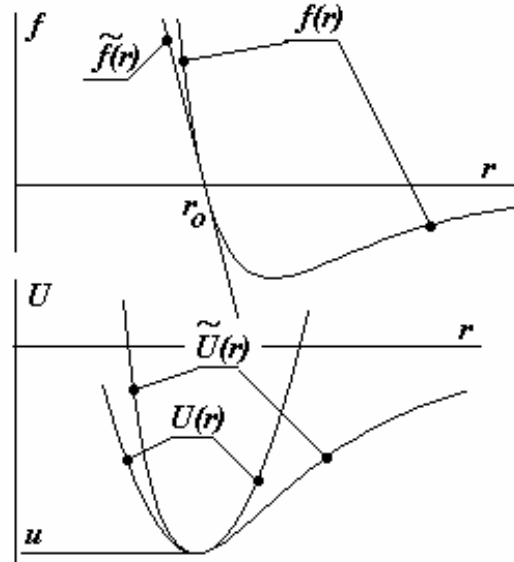
$$E = \frac{18}{\sqrt{2}} b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 12,7 b \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (8)$$

При расчете плотности и удельной теплоты сублимации анализ потенциальной кривой сводился к нахождению ее минимума. Для расчета упругих свойств кристалла при его деформации оказалось необходимым проанализировать поведение потенциальной энергии при небольших отклонениях от положения равновесия. Существенно, что мы ограничились линейным приближением при расчете возникающих сил упругости. Так точное выражение для силы взаимодействия $f(r)$, даваемое формулой (1), мы заменили его приближенным выражением $\tilde{f}(r_0 + x) \approx -kx$,

определяемым формулой (6). В этом приближении, точное выражение для потенциальной энергии $U(r)$ заменяется на квадратичное приближение

$$\tilde{U}(r_0 + x) \approx u + \frac{kx^2}{2} \quad (\text{см. рисунок}).$$

Обратите внимание, что вблизи положения равновесия отсутствуют постоянная составляющая в выражении для силы и линейный член в формуле для потенциальной энергии.



4. Сила взаимодействия между атомами принимает максимальное значение при некотором расстоянии r_l (посмотрите на график зависимости силы взаимодействия от расстояния). Если расстояние между атомами превысит r_l , то сила взаимодействия (притяжения) начнет уменьшаться и, следовательно, при постоянной внешней силе кристалл разрушится. Найдем значение r_l из условия $f' = 0$:

$$f' = -\frac{12 \cdot 13a}{r^{14}} + \frac{6 \cdot 7b}{r^8} = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) находим расстояние r_l , при котором сила притяжения максимальна

$$r_l = \left(\frac{26a}{7b} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (10)$$

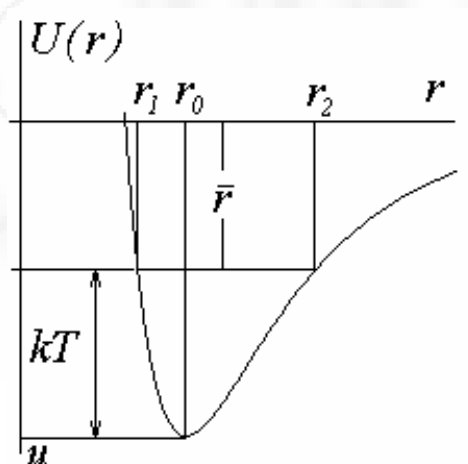
Таким образом, максимальное относительное удлинение кристалла до разрушения определяется соотношением

$$\varepsilon_{max} = \frac{r_l - r_0}{r_0} = \left(\frac{13}{7} \right)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0,11. \quad (11)$$

При таком удлинении сила взаимодействия и соответствующее механическое напряжение (которое и является предельной прочностью) определяются формулой

$$\sigma_{max} = \frac{U'(r_l)}{r_0^2} = \frac{18}{13\sqrt{2}} \left(\frac{7}{13} \right)^{\frac{7}{6}} b \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 0,48b \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (12)$$

5. Термическое расширение твердых тел связано с увеличением кинетической энергии колеблющихся атомов. С ростом температуры увеличивается диапазон изменения расстояний между атомами. Существенным фактором является несимметричность потенциальной кривой - максимальное отклонение от положения равновесия в большую сторону превышает отклонение в меньшую сторону. Обозначим



максимальное и минимальное расстояния между атомами в ходе колебаний r_1 и r_2 , соответственно. Тогда среднее расстояние между атомами может быть оценено как среднее арифметическое между этими величинами. Расстояния r_1 и r_2 являются корнями уравнения

$$U(r) = U(r_0) + kT, \quad (13)$$

где kT - средняя энергия одномерного колебательного движения атомов в кристаллической решетке (k - постоянная Больцмана, T - абсолютная

температура). Если обозначить $x = r^{-6}$ и принять во внимание формулу (20), то уравнение (13) примет вид

$$ax^2 - bx + \frac{b^2}{4a} - kT = 0, \quad (14)$$

корни которого находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{b}{2a} \left(1 \pm \sqrt{\frac{4akT}{b^2}} \right). \quad (15)$$

Теперь можно найти значения r_1 и r_2 :

$$r_{1,2} = r_0 (1 \pm \delta)^{-\frac{1}{6}} \approx r_0 \left(1 \mp \frac{\delta}{6} + \frac{7}{72} \delta^2 \right), \quad (16)$$

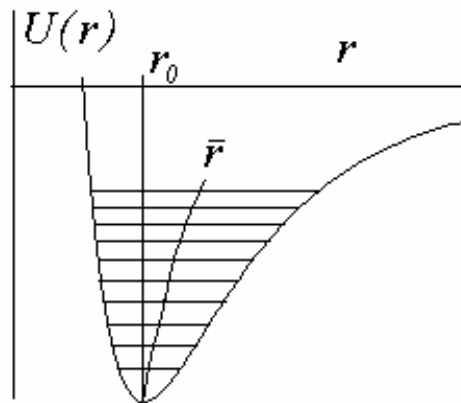
где обозначено $\delta = \sqrt{\frac{4akT}{b^2}}$ и использовано разложение степенной функции с учетом членом второго порядка малости. Среднее расстояние между атомами найдем, усредняя r_1 и r_2 :

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2}{2} = r_0 \left(1 + \frac{7}{72} \delta^2 \right) = r_0 \left(1 + \frac{7akT}{18b^2} \right). \quad (17)$$

Сравнивая выражение (17) с формулой термического расширения $l = l_0 (1 + \alpha \Delta T)$, находим линейный коэффициент термического расширения

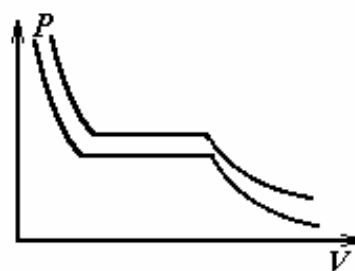
$$\alpha = \frac{7ak}{18b^2}. \quad (18)$$

Еще раз подчеркнем, что с микроскопической точки зрения, термическое расширение является следствием несимметричности потенциальной кривой. Если ограничиться квадратичным приближением, то эта несимметрия исчезает. Поэтому тепловое расширение является, по крайней мере, эффектом третьего порядка по смещению атома от положения равновесия. На рисунке показано смещение среднего расстояния между атомами с ростом температуры.



Задача 9. «Фазовые переходы»

На рисунке изображены две изотермы вещества, совершающего фазовый переход газ-жидкость, соответствующие двум очень близким температурам T и $T + \Delta T$. Рассмотрите цикл Карно между горизонтальными участками изотерм.



1. Покажите, что уравнение (которое называется уравнением Клапейрона-Клаузиуса), связывающее изменение давления насыщенных паров ΔP изменением температуры ΔT имеет вид

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{q}{T(V_1 - V_2)};$$

где обозначено: q - удельная теплота перехода, V_1 и V_2 - удельные объемы газовой и жидкой фаз, соответственно.

2. Считая изменения ΔP и ΔT бесконечно малыми, полагая q независимым от температуры, $V_2 \ll V_1$, считая пар идеальным газом, найдите зависимость давления насыщенных паров воды от температуры.

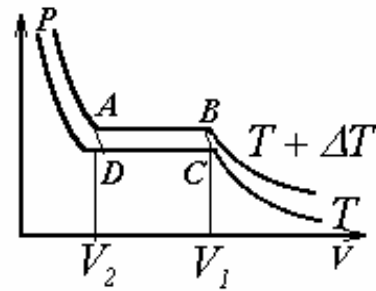
3. Представьте полученную зависимость в таких координатах, чтобы она была линейной. В таблице задана зависимость давления p насыщенных паров воды от температуры t . Используя все приведенные данные, найдите удельную теплоту парообразования воды.

$t, ^\circ\text{C}$	10	20	30	50	80	100
$p, \text{Па}$	1226	2333	4240	12330	47343	101325

4. Воспользуйтесь полученным в пункте 1 уравнением для описания фазового перехода жидкость - твердое тело. Найдите на сколько надо изменить давление, чтобы температура замерзания льда изменилась на один градус. Удельная теплота плавления льда равна $332 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$.

Решение.

1. «Замкнем» цикл двумя адиабатами AD и BC , проходящими через концы горизонтальных участков изотерм. Будем считать, что масса рабочего тела равна единице. Коэффициент полезного действия цикла Карно не зависит от рода рабочего тела и определяется формулой ³



$$\eta = \frac{\Delta T}{T}, \quad (1)$$

с другой стороны, по определению, КПД равен отношению работы A , совершенной за цикл, к количеству полученной теплоты Q . В рассматриваемом цикле количество полученной теплоты на участке AB равно удельное теплоте парообразования q , а работа совершенная в цикле равна ⁴ $A = \Delta P(V_1 - V_2)$, поэтому

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\Delta P(V_1 - V_2)}{q}. \quad (2)$$

Приравняв два выражения для КПД, получаем требуемое уравнение Клапейрона-Клаузиуса

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{q}{T(V_1 - V_2)}. \quad (3)$$

2. Переходя к бесконечно малым приращениям и пренебрегая объемом жидкости, получим уравнение

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{TV_1}. \quad (4)$$

Удельный объем газа выразим из уравнения состояния идеального газа

$PV_1 = \frac{RT}{M}$, (где M - молярная масса газа, напоминая, мы рассматриваем

единицу массы газа) $V_1 = \frac{RT}{PM}$ и подставим в уравнение (4) -

$$\frac{dP}{dT} = \frac{qPM}{RT^2}. \quad (5)$$

Чтобы решить это уравнение «разделим переменные»:

³ строго говоря, в знаменателе необходимо поставить температуру «нагревателя» $T + \Delta T$, но так как мы рассматриваем две очень близкие изотермы, то считаем, что $\Delta T \ll T$.

⁴ Мы опять пользуемся близостью изотерм.

$\frac{dP}{P} = \frac{qM}{R} \cdot \frac{dT}{T^2}$ и проинтегрируем $\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \frac{qM}{R} \cdot \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2}$. Здесь P_0 - значение давления насыщенных паров при некоторой температуре T_0 . В результате интегрирования получим

$$\ln \frac{P}{P_0} = \frac{qM}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \quad (6)$$

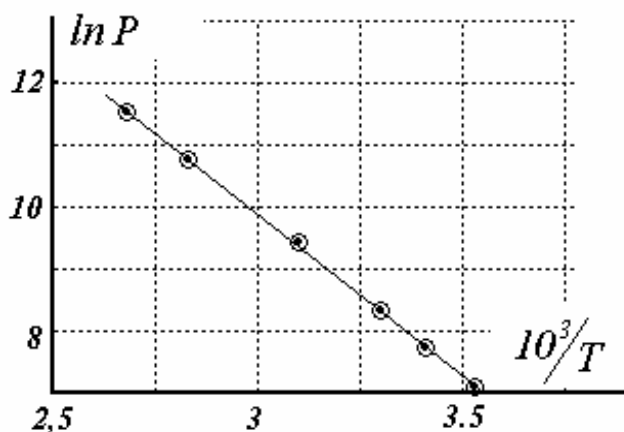
Теперь можно выразить явную зависимость давления насыщенных паров от температуры

$$P = P_0 \exp \left(\frac{qM}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right) = C \exp \left(- \frac{qM}{RT} \right) \quad (7)$$

3. Как видно из уравнений (6), (7), исследуемая зависимость будет линейной, если ее представить в виде функции⁵ $\ln P$ от $1/T$. Тогда $\ln P = b - a \cdot \frac{1}{T}$,

где $a = \frac{qM}{R}$, b - некоторая константа, зависящая от параметров задачи и их размерностей. Дополним заданную в условии таблицу необходимыми расчетными величинами

$t, ^\circ C$	10	20	30	50	80	100
$10^3 / T$	3,53	3,41	3,30	3,10	2,83	2,68
$p, \text{Па}$	1226	2333	4240	12330	47343	101325
$\ln P$	7,11	7,75	8,35	9,42	10,77	11,53



Нанесем полученные значения на график. Хорошо видно, что точки почти точно ложатся на прямую линию, следовательно, сделанные допущения вполне обоснованы.

Значение коэффициента a можно вычислить из графика, как отношение $\frac{\Delta(\ln P)}{\Delta(1/T)} \approx 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ K}$,

однако предпочтительнее, да и точнее

⁵ Использование логарифма от размерной величины может вызвать обоснованное удивление, конечно,

лучше использовать выражение $\ln \frac{P}{P_0}$, однако, используемое здесь выражение $\ln p$ отличается только

постоянным слагаемым. Так как нас интересует наклон графика, то эта аддитивная добавка не оказывает влияния на дальнейшие расчеты.

рассчитать его, используя метод наименьших квадратов⁶. Воспользуемся методикой расчета, описанной в Приложении 1.

№	$x = \frac{10^3}{T}$	$y = \ln P$
1	3,53	7,11
2	3,41	7,75
3	3,30	8,35
4	3,10	9,42
5	2,83	10,77
6	2,68	11,53

$$\langle x \rangle = \frac{\sum x_k}{N} \approx 3,142; \quad S_x^2 = \frac{\sum x_k^2}{N} - \langle x \rangle^2 \approx 9,331 \cdot 10^{-2};$$

$$\langle y \rangle = \frac{\sum y_k}{N} \approx 9,155; \quad S_y^2 = \frac{\sum y_k^2}{N} - \langle y \rangle^2 \approx 2,521;$$

$$R_{xy} = \frac{\sum x_k y_k}{N} - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle \approx -0,4849;$$

$$a = \frac{R_{xy}}{S_x^2} \approx -5,197; \quad \Delta a = 2 \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(\frac{S_y^2}{S_x^2} - a^2 \right)} \approx 0,086.$$

Окончательный результат расчета параметра имеет вид (с учетом множителя 10^3)

$$a = (-5,20 \pm 0,09) \cdot 10^3 \text{ K}.$$

Теперь из формулы $a = \frac{qM}{R}$ можно вычислить значение удельной теплоты парообразования воды

$$q = \frac{aR}{M} = (2,40 \pm 0,04) \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

Заметим, что удельная теплота парообразования слегка зависит от температуры, поэтому найденное значение следует рассматривать как среднее в заданном диапазоне температур.

4. Для описания фазового перехода твердое тело-жидкость (плавления) можно воспользоваться следующими приближениями:

- считать удельную теплоту перехода независимой от температуры;
- считать удельные объемы твердой и жидкой фаз постоянными, не зависящими от давления и температуры.

В рамках этих приближений уравнение перехода имеет вид

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(1/\rho_1 - 1/\rho_2)}, \quad (8)$$

⁶ Подробнее о методе наименьших квадратов и его реализации на калькуляторе описано в Приложении 1.

где ρ_1, ρ_2 - плотности воды и льда, соответственно. Так как изменение температуры мало, то можно записать

$$\Delta P = \frac{q}{(1/\rho_1 - 1/\rho_2)} \cdot \frac{\Delta T}{T} \approx 11 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

При расчетах мы воспользовались табличными данными для плотностей воды и льда, а также положили $\Delta T = -1 \text{ К}$, $T = 273 \text{ К}$. Обратите внимание на величину давления - более ста атмосфер!

Заметим, что для большинства веществ с увеличением давления температура плавления повышается. Однако, для некоторых веществ, которые при плавлении уменьшают свой объем (лед, висмут, галлий), увеличение давления приводит к понижению температуры плавления.

Точное решение уравнения (8) можно получить методом разделения переменных

$$dP = \frac{q}{(1/\rho_1 - 1/\rho_2)} \cdot \frac{dT}{T};$$

$$\int dP = \frac{q}{(1/\rho_1 - 1/\rho_2)} \int \frac{dT}{T};$$

$$P = P_0 + \frac{q}{(1/\rho_1 - 1/\rho_2)} \cdot \ln \frac{T}{T_0}$$

Обратите внимание, как слабо изменяется температура плавления при изменении давления, особенно если сравнить с изменением температуры кипения при изменении давления.